Der

ttractionscalcül.

Eine Monographie

von

Dr. Oskar Schlömilch,

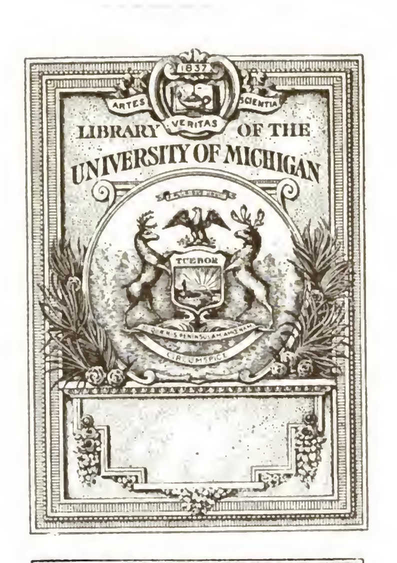
Professor der höheren Mathematik und analytischen Mechanik an der Königl. Sächs. technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Mit einer Figurentafel.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1851.


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



Alexander Ziwet

Der

Attractionscalcül.

Eine Monographie

von

Dr. Oskar Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik und analytischen Mechanik an der Königl. Sächs. technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Mit einer Figurentafel.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1851.

Alex. Ziwet
gt.
10-24-1922

Einleitung.

Die Berechnung der Anziehung, welche ein materieller Punkt von einer irgendwie gestatteten Masse erleidet, gehört zu den Problemen, die sich einer besonderen Aufmerksamkeit von Seiten der Analytiker zu erfreuen haben; namentlich ist es die Anziehung der Sphäroide, mit deren Ermittelung die grössten Mathematiker — wir nennen nur *Lagrange*, *Laplace*, *Ivory*, *Poisson*, *Gauss*, *Jacobi* und *Lejeune Dirichlet* — beschäftigt gewesen sind, theils wegen der analytischen Schwierigkeiten, die sie darbietet, theils wegen ihres Zusammenhanges mit den Untersuchungen über die Gestalt der Erde und über die Schwere an deren Oberfläche. Wenn wir nun dieses oft behandelte Thema des Attractionscalcüls hier wiederum vornehmen, so geschicht dies aus einem doppelten Grunde; einmal, um die wesentlichsten Resultate der bisherigen Arbeiten übersichtlich zusammenzustellen, besonders aber, um ein neues Moment in diese Untersuchungen einzuführen. Man hat sich nämlich fast durchaus nur mit dem sehr einfachen Falle beschäftigt, in welchem die anziehende Masse als eine homogene betrachtet wird, und obwohl man sich gestehen musste, dass diese Voraussetzung gewiss nur äusserst selten in der Natur erfüllt sein wird, so findet sich gleichwohl kein tiefer eingehender Versuch zur Berechnung der Anziehung, welche ein Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit ausübt. Vielleicht, dass man sich durch die Schwierigkeiten hat abschrecken lassen, die schon bei homogenen Körpern den Calcül umgeben und von denen allerdings eine Wiederholung in grösserem Maasse zu fürchten war, wenn man das Problem verallgemeinern

wollte. Dass aber diese Schwierigkeiten keine unübersteiglichen sind und dass ihre Besiegung zu sehr eleganten Resultaten führen kann (m. s. z. B. die neuen Formeln über das dreiachsige Ellipsoid mit variabler Dichtigkeit und das darauf bezügliche merkwürdige Reduktionstheorem in §. 10), das werden die nachfolgenden Blätter wohl beweisen.

---

§. 1.

Allgemeine Begriffe und Formeln.

Wenn es überhaupt eine Kraft giebt, welche sich von einem Massenpartikel, als ihrem Sitze, aus allseitig strahlenförmig durch den Raum verbreitet — und man ist in der That gezwungen, die Existenz solcher Kräfte vorauszusetzen —, so kann die Wirkung derselben auf ein anderes Massentheilchen nur von der Grösse der beiden Massen und ihrer Entfernung, nicht aber von der Richtung der letzteren abhängig sein, weil es im Raume keine bevorzugten Richtungen, kein absolutes Oben oder Unten giebt. Daraus folgt sogleich, dass alle in gleicher Entfernung um das erste Massenpartikel herumliegenden materiellen Punkte eine gleiche Einwirkung erleiden, oder, was Dasselbe ist, dass alle Punkte einer um jenes Massenpartikel beschriebenen Kugelfläche eine gleiche Beschleunigung erhalten. Construiren wir eine zweite grössere concentrische Kugelfläche, so vertheilt sich dieselbe Wirkung, welche auf die erste Fläche fiel, nunmehr auf die zweite und die Intensität (man könnte fast sagen: Dichtigkeit) der Wirkung wird an einer bestimmten Stelle der zweiten Fläche soviel mal kleiner sein, als die zweite Fläche die erste an Grösse übertrifft. Da nun concentrische Kugelflächen wie die Quadrate der Halbmesser zunehmen, so muss die Einwirkung des im Mittelpunkte befindlichen Massenpartikels in eben demselben Maasse abnehmen; eine allseitig in die Ferne wirkende Kraft können wir uns daher nicht wohl anders, als nach umgekehrtem quadratischen Verhältniss wirkend vorstellen, dagegen würde das einfache umgekehrte Verhältniss auf solche Kräfte passen, welche nach einer einzigen absoluten Richtung im Raum wirken sollten. Um noch die Massen mit in Rechnung zu ziehen, genügt die be-

kannte Regel, dass sich bewegende Kräfte direkt wie die Massen verhalten; die Einwirkung eines ponderabelen Moleküles μ auf ein anderes μ', welches sich in der Entfernung u befindet, wird demnach durch $\frac{\mu\mu'}{u^2}$ ausgedrückt, und die Einheit dieser Kraft ist hier diejenige Kraft, mit welcher die Masseneinheit auf eine um die Längeneinheit entfernte gleiche Masse wirkt. Was die Richtung dieser Kraft anbelangt, so fällt diese, wenigstens bei der Gravitation und den magnetischen Flüssigkeiten, mit der Richtung von u zusammen, und die bewegende Kraft strebt die Entfernung u entweder zu verringern oder zu vergrössern. Bleiben wir beim ersten Falle stehen, so haben wir die gewöhnliche Anziehung, wie z. B. die Gravitation, und auf diese beziehen sich die folgenden Formeln.

Bezeichnen wir mit dV das Element einer irgendwie gestalteten materiellen Linie, einer Fläche, oder eines Körpers und mit Θ die Dichtigkeit dieses Elementes, so ist $\Theta\, dV$ die Masse desselben und diese übt auf einen in der Entfernung u befindlichen Punkt, dem wir der Einfachheit wegen die Masse Eins zuschreiben, die Anziehung

1) $$\frac{\Theta\, dV}{u^2}.$$

Bezeichnen wir ferner mit x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des anziehenden Elementes und mit α, β, γ die des angezogenen Punktes, wo nun

2) $$u = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}$$

ist, so können wir jene Elementaranziehung in drei Componenten parallel den Coordinatenaxen zerlegen, indem wir $\frac{\Theta\, dV}{u^2}$ mit dem Cosinus derjenigen Winkel multipliziren, welche u mit den drei Coordinatenachsen einschliesst; diese drei Winkel mögen (u, x), (u, y), (u, z) heissen und dann sind die Componenten der Elementaranziehung

3) $$\frac{\Theta\, dV}{u^2} \cos(u, x), \quad \frac{\Theta\, dV}{u^2} \cos(u, y), \quad \frac{\Theta\, dV}{u^2} \cos(u, z).$$

Hieraus ergeben sich durch Integration die Componenten der Gesammtanziehung der Masse und zwar ist die Integration eine einfache, doppelte oder dreifache, je nachdem die Masse auf einer Linie, einer Fläche oder in einem Körper vertheilt ist, wobei der Ausdruck Masse nichts weiter

als Dasjenige bedeutet, wovon die Anziehung ausgehend gedacht wird; im ersten Falle tritt an die Stelle von dV das Linienelement ds oder bei rechtwinkligen Coordinaten

$$dz\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

im zweiten Falle das Flächenelement

$$dx\;dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

und im dritten Falle das Volumenelement

4) $$dV = dx\;dy\;dz.$$

Beschränken wir uns auf den letzten Fall als den einzigen, welcher in der Natur vorkommt, und berücksichtigen wir die bekannten Gleichungen

5) $$\cos(u,x)=\frac{\alpha-x}{u},\quad \cos(u,y)=\frac{\beta-y}{u},\quad \cos(u,z)=\frac{\gamma-z}{u}$$

so sind jetzt die Componenten A, B, C der Gesammtanziehung

6) $$\begin{cases} A = \displaystyle\iiint\frac{\Theta(\alpha-x)}{u^3}\,dx\;dy\;dz \\ B = \displaystyle\iiint\frac{\Theta(\beta-y)}{u^3}\,dx\;dy\;dz \\ C = \displaystyle\iiint\frac{\Theta(\gamma-z)}{u^3}\,dx\;dy\;dz \end{cases}$$

oder vermöge des aus No. 2 bekannten Werthes von u

7) $$\begin{cases} A = \displaystyle\iiint\frac{\Theta(\alpha-x)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}^3} \\ B = \displaystyle\iiint\frac{\Theta(\beta-y)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}^3} \\ C = \displaystyle\iiint\frac{\Theta(\gamma-z)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}^3} \end{cases}$$

wobei die Integrationsgränzen so zu wählen sind, dass nur die im Innern des Körpers liegenden Punkte xyz in Rechnung kommen.

Will man sich statt rechtwinkliger Coordinaten lieber der Polarcoordinaten bedienen, was oft bequemer ist, so bezeichne man den Radius-

vector des Punktes xyz mit ϱ, den Winkel zwischen ϱ und x mit ϑ, endlich den Neigungswinkel, welcher die Ebene des Winkels ϑ mit der Coordinatenebene xy einschliesst, durch ω, so ist *)

$$x = \varrho \cos\vartheta,\ y = \varrho \sin\vartheta \cos\omega,\ z = \varrho \sin\vartheta \sin\omega$$

und das Volumenelement $dV = dx\,dy\,dz = \varrho^2 \sin\vartheta\, d\omega\, d\vartheta\, d\varrho$, mithin

$$8)\ \begin{cases} A = \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{\Theta(\alpha - \varrho\cos\vartheta)\,\varrho^2 \sin\vartheta\, d\omega\, d\vartheta\, d\varrho}{\sqrt{(\alpha-\varrho\cos\vartheta)^2+(\beta-\varrho\sin\vartheta\cos\omega)^2+(\gamma-\varrho\sin\vartheta\sin\omega)^2}^{\,3}} \\ B = \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{\Theta(\beta - \varrho\sin\vartheta\cos\omega)\,\varrho^2 \sin\vartheta\, d\omega\, d\vartheta\, d\varrho}{\sqrt{(\alpha-\varrho\cos\vartheta)^2+(\beta-\varrho\sin\vartheta\cos\omega)^2+(\gamma-\varrho\sin\vartheta\sin\omega)^2}^{\,3}} \\ C = \displaystyle\int\!\!\int\!\!\int \frac{\Theta(\gamma - \varrho\sin\vartheta\sin\omega)\,\varrho^2 \sin\vartheta\, d\omega\, d\vartheta\, d\varrho}{\sqrt{(\alpha-\varrho\cos\vartheta)^2+(\beta-\varrho\sin\vartheta\cos\omega)^2+(\gamma-\varrho\sin\vartheta\sin\omega)^2}^{\,3}} \end{cases}$$

und diese Formeln vereinfachen sich namentlich dann bedeutend, wenn man den angezogenen Punkt zum Coordinatenanfang wählt, also $\alpha = \beta = \gamma = 0$ setzt, wie es später einmal geschehen wird.

Die Berechnung der drei Componenten A, B, C lässt sich noch in einer anderen Weise ausführen, bei welcher es nur einer dreifachen Integration bedarf. Aus dem Werthe von u geht nämlich hervor, dass bei partieller Differenziation in Beziehung auf α

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \frac{\alpha - x}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}} = \frac{\alpha - x}{u}$$

mithin

$$-\left(\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\alpha}\right) = \frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \frac{\alpha - x}{u^3}$$

sein muss. Bezeichnen wir den linker Hand vorkommenden partiellen Differentialquotienten mit $D_\alpha\left(\frac{1}{u}\right)$, so ist nun nach dem Obigen und durch partielle Differenziation in Beziehung auf β und γ

$$\frac{\alpha - x}{u^3} = -D_\alpha\left(\frac{1}{u}\right),\quad \frac{\beta - y}{u^3} = -D_\beta\left(\frac{1}{u}\right),\quad \frac{\gamma - z}{u^3} = -D_\gamma\left(\frac{1}{u}\right)$$

und demgemäss sind die Werthe von A, B, C nach No. 6)

---

*) s. Note I.

$$A = -\int\int\int \Theta \, . \, D_\alpha \left(\frac{1}{u}\right) dx\ dy\ dz$$

$$B = -\int\int\int \Theta \, . \, D_\beta \left(\frac{1}{u}\right) dx\ dy\ dz$$

$$C = -\int\int\int \Theta \, . \, D_\gamma \left(\frac{1}{u}\right) dx\ dy\ dz.$$

Versparen wir die auf α, β, γ bezüglichen partiellen Differenziationen bis nach Ausführung der angedeuteten Integrationen, so nehmen A, B, C folgende Formen an:

$$A = -D_\alpha \int\int\int \Theta \, . \, \frac{1}{u}\ dx\ dy\ dz$$

$$B = -D_\beta \int\int\int \Theta \, . \, \frac{1}{u}\ dx\ dy\ dz$$

$$C = -D_\gamma \int\int\int \Theta \, . \, \frac{1}{u}\ dx\ dy\ dz$$

und man erkennt hieraus, dass es nur darauf ankommt, den Werth des dreifachen Integrales

$$\int\int\int \frac{\Theta\ dx\ dy\ dz}{u}$$

zu ermitteln, da die Componenten A, B, C nichts Anderes als die drei in Beziehung auf α, β, γ partiell und negativ genommenen Differentialquotienten desselben sind. Dieses dreifache Integral, die Summe der Massenelemente, dividirt durch ihre jedesmalige Entfernung vom angezogenen Punkte, nennen wir mit *Gauss* das Potential der Anziehung; bei rechtwinkligen Coordinaten ist dasselbe

9) $$P = \int\int\int \frac{\Theta\ dx\ dy\ dz}{\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}}$$

bei Polarcoordinaten

10) $$P = \int\int\int \frac{\Theta\ \varrho^2 \sin\vartheta\ d\omega\ d\vartheta\ d\varrho}{\sqrt{(\alpha - \varrho\cos\vartheta)^2 + (\beta - \varrho\sin\vartheta\cos\omega)^2 + (\gamma - \varrho\sin\vartheta\sin\omega)^2}}$$

und für die Componenten A, B, C gelten jetzt die Formeln

11) $$A = -\left(\frac{dP}{d\alpha}\right),\quad B = -\left(\frac{dP}{d\beta}\right),\quad C = -\left(\frac{dP}{d\gamma}\right).$$

Natürlich wird bei dieser Berechnungsweise der Componenten vorausgesetzt, dass die Ermittelung des Potentials für ganz beliebige α, β, γ erfolgt sei, weil eine Differenziation in Beziehung auf spezialisirte α, β, γ nicht möglich sein würde.

§. 2.

Anziehung sehr weit von einander entfernter Massen.

Wenn der Abstand des angezogenen Punktes $\alpha\beta\gamma$ von dem anziehenden Körper sehr gross ist im Verhältniss zu den Dimensionen des letzteren, so lässt sich der im Potenziale vorkommende Faktor

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}}$$

in eine stark convergirende Reihe entwickeln, welche nach Potenzen und Produkten von x, y und z fortschreitet. Bezeichnen wir mit E die Entfernung des angezogenen Punktes vom Anfangspunkte der Coordinaten, so ist

12) $$E^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

und

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{E^2-2(\alpha x+\beta y+\gamma z)+x^2+y^2+z^2}}$$
$$= \frac{1}{E} + \frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{E^3}$$
$$+ \frac{(3\alpha x+\beta y+\gamma z)^2-(x^2+y^2+z^2)E^2}{2E^5} + \ldots\ldots$$

Vermöge dieser Entwickelung ist nun

13) $$P = \frac{1}{E}\int\int\int \Theta\, dx\, dy\, dz$$
$$+ \frac{1}{E^3}\left[\alpha\int\int\int \Theta x\, dx\, dy\, dz + \beta\int\int\int \Theta\, y\, dx\, dy\, dz\right.$$
$$\left. + \gamma\int\int\int \Theta z\, dx\, dy\, dz\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei wir die übrigen Glieder wegen ihrer verhältnissmässigen Kleinheit vernachlässigen können, um eine einfache Näherungsformel zu erhalten. Die statische Bedeutung der vier Integrale, welche in dem Werthe von P jetzt noch vorkommen, ist nun sehr leicht zu erkennen. Das erste dreifache Integral giebt die Summe aller Massenelemente, also die Gesammtmasse des anziehenden Körpers, welche wir M nennen wollen; das zweite Integral ist nichts Anderes als die Summe der statischen Momente aller Körperpartikel, bezogen auf die Coordinatenebene yz, also gleich dem Momente der in ihrem Schwerpunkte vereinigten Masse M, und ganz ähnlich ist die Bedeutung des dritten und vierten Integrales; nennen wir daher ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes des anziehenden Körpers, so haben wir

$$\int\int\int \Theta x \; dx \; dy \; dz = M\xi$$

$$\int\int\int \Theta y \; dx \; dy \; dz = M\eta$$

$$\int\int\int \Theta z \; dx \; dy \; dz = M\zeta$$

und mithin nach No. 13)

14) $$P = \frac{M}{E} + \frac{M}{E^3}(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta).$$

Diese Formel vereinfacht sich bedeutend, wenn man den bisher noch willkührlichen Anfangspunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt verlegt, also $\xi = \eta = \zeta = 0$ setzt, wodurch

15) $$P = \frac{M}{E} = \frac{M}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

wird. Durch partielle Differenziationen in Beziehung auf α, β, γ erhält man hieraus

$$A = \frac{M\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}^3}, \quad B = \frac{M\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}^3}, \quad C = \frac{M\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}^3}.$$

Die Resultante R dieser in den Richtungen der drei Coordinatenachsen wirkenden Kräfte bestimmt sich nunmehr nach der bekannten Formel

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

und sie ist vermöge der Werthe von A, B, C

16) $$R = \frac{M}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \frac{M}{E^2}$$

d. h. bei hinlänglich grosser Entfernung des angezogenen Punktes ist die Anziehung, welche er leidet, fast dieselbe, als wenn die Masse des anziehenden Körpers in ihrem Schwerpunkte vereinigt wäre.

§. 3.

Anziehung des abgestumpften Kegels.

Um zunächst einen einfachen Fall zu haben, in welchem sich die drei zur Berechnung der Anziehung erforderlichen Integrationen ohne besondere Kunstgriffe ausführen lassen, betrachten wir die Anziehung, die ein gewöhnlicher abgestumpfter Kegel auf einen Punkt seiner verlängerten Achse ausübt.

Den angezogenen Punkt P (Fig. 2.) nehmen wir zum Anfangspunkte der Coordinaten, also $\alpha=\beta=\gamma=0$; von den drei Componenten A, B, C sind dann die beiden letzten $=0$, weil der anziehende Körper dem angezogenen Punkte in der Weise symmetrisch gegenüberliegt, dass die Seitenanziehungen der Körperelemente sich gegenseitig aufheben. Die Componente A ist daher zugleich die Gesammtanziehung, nämlich

17) $$A = \int\int\int \frac{\Theta x \, dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$$

indem wir auf das Vorzeichen nicht achten, da es nur die Richtung der Anziehung, nicht aber ihre Intensität betrifft. Um die Integrationsgränzen für das obige dreifache Integral zu ermitteln, betrachten wir $PK=x$, $KL=y$, $LM=z$ als die rechtwinkligen Coordinaten eines Körperelementes M und setzen ferner den grösseren Halbmesser des abgestumpften Kegels $=r$, den kleineren $=\varrho$, die Höhe $=h$ und den Abstand des angezogenen Punktes von der kleineren Kreisfläche $=a$. Hiernach sind die Gränzen für x offenbar

$$x=a \text{ und } x=a+h.$$

Verlängern wir $KL=y$, bis diese Gerade die Kegelfläche in zwei Punkten L' und L'' schneidet (die Figur giebt nur den vorderen Punkt L'), so sind $y=KL''$ bis $y=KL'$ die Gränzen für y; nun findet man ohne Mühe

18) $$KL' = \varrho + (x - a)\,\frac{r - \varrho}{h} = p$$

wo p nur zur Abkürzung dienen soll, und es sind daher

$$y = -p \text{ bis } y = +p$$

die Gränzen für y. Verlängern wir endlich $LM = z$ bis diese Gerade die Kegelfläche in zwei Punkten M' und M'' schneidet (die Figur zeigt nur den oberen Punkt M'), so sind $z = LM''$ bis $z = LM'$ die Gränzen für z; man hat aber

$$LM' = \sqrt{(\overline{KM'}^2 - \overline{KL}^2)} = \sqrt{(\overline{KL'}^2 - \overline{KL}^2)}$$

19) $$= \sqrt{p^2 - y^2} = q$$

wo q ein Abkürzungszeichen ist, und mithin für z die Gränzen

$$z = -q \text{ bis } z = +q.$$

Nach diesen Erörterungen gestaltet sich die Formel 17) wie folgt:

$$A = \int_a^{a+h} x\,dx \int_{-p}^{+p} dy \int_{-q}^{+q} \frac{\Theta\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}$$

wo nun über die Dichtigkeit Θ noch eine Bestimmung zu treffen ist. Denken wir uns den abgestumpften Kegel, bestehend aus einer stetigen Folge von Schichten, senkrecht auf der Axe der x, und zwar in der Weise, dass jede Schicht für sich homogen ist und erst von Schicht zu Schicht die Dichtigkeit wechselt, so hängt Θ nur von x ab und kann demnach als eine willkührliche Funktion von x, etwa als $f(x)$ bezeichnet werden. Die vollständig bestimmte Formel für A ist jetzt

20) $$A = \int_a^{a+h} x f(x)\,dx \int_{-p}^{+p} dy \int_{-q}^{+q} \frac{dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}$$

und hier können die zwei auf z und y bezüglichen Integrationen sehr leicht ausgeführt werden.

Vermöge der bekannten Formel

$$\int \frac{dz}{\sqrt{k + z^2}^3} = \frac{z}{k\sqrt{k + z^2}}$$

findet man sogleich für $k = x^2 + y^2$ und nachher vermöge des Werthes von q

$$\int_{-q}^{+q} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = \frac{2q}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+q^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{p^2-y^2}}{(x^2+y^2)\sqrt{p^2+x^2}}$$

folglich, weil p kein y enthält und daher für die nächste Integration als Constante gilt,

21) $$A = 2\int_a^{a+h} \frac{x\,f(x)\,dx}{\sqrt{p^2+x^2}} \int_{-p}^{+p} dy\,\frac{\sqrt{p^2-y^2}}{x^2+y^2}$$

Die auf y bezügliche Integration ist leicht zu bewerkstelligen, wenn man eine neue Variable t durch die Substitution $y = p\sin t$ einführt, in Beziehung auf welche die Gränzen $t = +\frac{1}{2}\pi$ und $t = -\frac{1}{2}\pi$ den früheren Gränzen $y = +p$ und $y = -p$ entsprechen; man hat dann

$$\int_{-p}^{+p} dy\,\frac{\sqrt{p^2-y^2}}{x^2+y^2} = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{p^2\cos^2 t\,dt}{x^2+p^2\sin^2 t}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \left\{\frac{p^2+x^2}{x^2+p^2\sin^2 t} - 1\right\} dt = (p^2+x^2)\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{dt}{x^2+p^2\sin^2 t} - \pi$$

Nach einer bekannten Formel ist aber

$$\int \frac{dt}{x^2+p^2\sin^2 t} = \int \frac{dt}{x^2\cos^2 t + (p^2+x^2)\sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{p^2+x^2}}\,Arctan\left(\frac{\sqrt{p^2+x^2}}{x}\tan t\right)$$

und wenn man diess für das Vorhergehende benutzt, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\int_{-p}^{+p} dy\,\frac{\sqrt{p^2-y^2}}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{p^2+x^2}}{x}\pi - \pi$$

und durch Substitution in die unter No. 21. verzeichnete Formel

$$A = 2\pi\int_a^{a+h} f(x)\,dx\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{p^2+x^2}}\right\}$$

oder endlich vermöge des in No. 18. verzeichneten Werthes von p

22) $$A = 2\pi \int_a^{a+h} \left[1 - \frac{hx}{\sqrt{h^2 x^2 + [h\varrho + (r-\varrho)(x-a)]^2}}\right] f(x)\, dx$$

womit die Aufgabe in so fern gelöst ist, als eine einfache Integration jederzeit, sei es genau oder durch Näherung, ausgeführt werden kann.

Für den speziellen Fall $\varrho = r$ erhält man die Anziehung des Cylinders mit dem Halbmesser r und der Höhe h, nämlich

23) $$A = 2\pi \int_a^{a+h} \left\{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right\} f(x)\, dx\ .$$

für $\varrho = 0$ dagegen die Anziehung eines Kegels von denselben Dimensionen, nämlich

24) $$A = 2\pi \int_a^{a+h} \left\{1 - \frac{hx}{\sqrt{h^2 x^2 + r^2 (x-a)^2}}\right\} f(x)\, dx.$$

Bemerkenswerth ist der Umstand, dass es viele Formen von $f(x)$ giebt, für welche die Anziehung eines unendlich langen Cylinders oder Kegels immer noch eine endliche Grösse bleibt; so ergiebt sich z. B. aus No. 23. für eine constante Dichtigkeit, etwa $f(x) = k$,

$$A = 2k\pi \left\{h - \sqrt{(a+h)^2 + r^2} + \sqrt{a^2 + r^2}\right\}$$

d. i. für $a + h > r$ durch Verwandlung in eine unendliche Reihe

$$A = 2k\pi \left\{-a - \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{a+h} + \tfrac{1}{8}\frac{r^4}{(a+h)^3} - \ldots + \sqrt{a^2 + r^2}\right\}$$

woraus bei unendlich wachsenden h folgt:

$$A = 2k\pi \left\{\sqrt{a^2 + r^2} - a\right\}$$

auch selbst in der Berührung, d. h. für $a = 0$, würde die Anziehung hier noch endlich $= 2k\pi r$ sein. Aehnliche Fälle lassen sich beliebig viele angeben.

§. 4.

Anziehung der Kugel und Kugelschaale.

Den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen wir in den Mittelpunkt der Kugel und für die Axe der x nehmen wir diejenige Gerade, welche

den Mittelpunkt der Kugel mit dem angezogenen Punkte verbindet; die Coordinaten des letzteren sind dann α und $\beta=\gamma=0$. Bei dieser Lage heben sich alle Seitenanziehungen, welche der angezogene Punkt erleidet, gegenseitig auf, die Componenten B und C verschwinden und die Componente A stellt die Anziehung selbst in ihrer Totalität dar. Benutzen wir Polarcoordinaten und berechnen A mittelst des Potentiales, so ist wegen $\beta=\gamma=0$ nach Formel 10)

$$P=\int\int\int\frac{\Theta\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\omega}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}}$$

worin noch die Integrationsgränzen zu bestimmen wären. Für ϱ sind dieselben $\varrho=0$ und $\varrho=r$, wo r den Halbmesser der Kugel bezeichnet, dem ϑ steht der Spielraum $\vartheta=0$ bis $\vartheta=\pi$ offen und ω erstreckt sich von $\omega=0$ bis $\omega=2\pi$. Um über die Dichtigkeit Θ eine Bestimmung zu treffen, wollen wir annehmen, dass die Kugel aus einer stetigen Folge concentrischer kugelförmiger Schichten bestehe, von denen jede für sich homogen ist, während die Dichtigkeit von einer Schicht zur anderen wechselt. Unter dieser Voraussetzung ist Θ eine Funktion von ϱ allein etwa $=f(\varrho)$ und mithin

$$P=\int_0^r \varrho^2 f(\varrho)\, d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}} \int_0^{2\pi} d\omega$$

oder durch Ausführung der auf ϱ bezüglichen Integration

25) $$P=2\pi\int_0^r \varrho^2 f(\varrho)\, d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}}.$$

Bei unbestimmter Integration ist nun weiter

$$\int\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}}=\frac{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}}{\alpha\varrho}+Const$$

folglich durch Einführung der Gränzen $\vartheta=\pi$ und $\vartheta=0$

26) $$\int_0^\pi\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}}=\frac{\sqrt{\alpha^2+2\alpha\varrho+\varrho^2}-\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho+\varrho^2}}{\alpha\varrho}.$$

Um nun entscheiden zu können, ob man in dem Subtrahenden rechter Hand $\alpha-\varrho$ oder $\varrho-\alpha$ für die Wurzelgrösse zu setzen habe, muss

man erst wissen, ob α grösser oder kleiner als ϱ ist, d. h. man muss die Fälle unterscheiden, wo der angezogene Punkt ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt.

Im ersten Falle ist $\alpha > r$, also um so mehr $> \varrho$, weil ϱ höchstens $= r$ werden kann und mithin

$$\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\varrho\cos\vartheta + \varrho^2}} = \frac{\alpha + \varrho - (\alpha - \varrho)}{\alpha\varrho} = \frac{2}{\alpha}$$

Durch Substitution dieses Werthes wird

27) $$P = \frac{4\pi}{\alpha} \int_0^r \varrho^2 f(\varrho) \, d\varrho.$$

Diess lässt sich leicht einfacher ausdrücken. Die Masse M der Kugel würde nämlich sein

$$M = \int_0^r \varrho^2 f(\varrho) \, d\varrho \int_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta \int^{2\pi} d\omega = 4\pi \int_0^r \varrho^2 f(\varrho) \, d\varrho$$

und also wird jetzt aus No. 27.

$$P = \frac{M}{\alpha}$$

mithin die Gleichung $A = -D_\alpha P$ oder

28) $$A = \frac{M}{\alpha^2}$$

d. h. die Anziehung einer aus concentrischen Schichten von verschiedener Dichtigkeit zusammengesetzten Kugel geschieht auf einen aussenliegenden Punkt ebenso, als wenn die ganze Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Liegt dagegen der angezogene Punkt im Innern der anziehenden Masse selbst, ist also $\alpha < r$, so giebt es theils solche ϱ, welche $< \alpha$, theils solche, die $> \alpha$ sind. Um diese verschiedenen ϱ zu trennen, zerlegen wir in No. 25. die von $\varrho = 0$ bis $\varrho = r$ erstreckte Integration in zwei andere von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \alpha$ und von $\varrho = \alpha$ bis $\varrho = r$ gehende Ingrationen; dann ist

$$P=2\pi\int_0^\alpha \varrho^2 f(\varrho)\,d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}}$$

$$+2\pi\int_\alpha^r \varrho^2 f(\varrho)\,d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}}$$

Im ersten Doppelintegrale ist nun $\varrho<\alpha$ und wir setzen daher

$$\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}}=\frac{\alpha+\varrho-(\alpha-\varrho)}{\alpha\varrho}=\frac{2}{\alpha}$$

im zweiten Integrale dagegen ist $\varrho>\alpha$ und daher

$$\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}}=\frac{\varrho+\alpha-(\varrho-\alpha)}{\alpha\varrho}=\frac{2}{\varrho}$$

Vermöge dieser Substitutionen erhält jetzt P den Werth

$$P=\frac{4\pi}{\alpha}\int_0^\alpha \varrho^2 f(\varrho)\,d\varrho+4\pi\int_\alpha^r \varrho f(\varrho)\,d\varrho.$$

Um hieraus die Anziehung A abzuleiten, bedarf es nur der Erinnerung an die bekannten Sätze *)

$$D_\alpha \int_a^\alpha \psi(\varrho)\,d\varrho=\psi(\alpha)$$

$$D_\alpha \int_\alpha^b \psi(\varrho)\,d\varrho=-\psi(\alpha)$$

und man findet dann ohne Schwierigkeit:

29) $$A=\frac{4\pi}{\alpha^2}\int_0^\alpha \varrho^2 f(\varrho)\,d\varrho$$

Unter der Rücksicht, dass hier der Faktor von $\frac{1}{\alpha^2}$ die Masse einer mit dem Halbmesser α beschriebenen Kugel bezeichnet, ergiebt sich hieraus das Theorem:

---

*) s. Note II.

Ein im Innern der Kugel liegender, um α von deren Mittelpunkte entfernter Punkt erleidet dieselbe Anziehung, als wenn nur eine mit dem Halbmesser α beschriebene Kugel vorhanden und die Masse derselben in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Bei einer homogenen Kugel, also etwa $f(\varrho) = k$, ist demnach für einen äussern Punkt

$$A = \tfrac{4}{3}\pi k \frac{r^3}{\alpha^2} \qquad , \quad \alpha > r$$

und für einen innenliegenden

$$A = \tfrac{4}{3}\pi k \frac{\alpha^3}{\alpha^2} = \tfrac{4}{3}\pi k \alpha \qquad , \quad \alpha < r$$

mithin im letzteren Falle die Anziehung direkt proportional der Entfernung des Punktes vom Centrum. Für einen auf der Oberfläche der Kugel liegenden Punkt, d. h. für $\alpha = r$, vereinigen sich beide Formeln zu dem Werthe $\tfrac{4}{3}\pi k r$.

Um die Anziehung einer aus den Halbmessern r_1 und r_2 beschriebenen Kugelschaale zu bestimmen, braucht man dieselbe nur als die Differenz zweier Kugeln anzusehen, von denen die erste mit dem grösseren Halbmesser r_1 und die zweite mit dem kleineren Halbmesser r_2 beschrieben ist. Nennen wir M_1 die Masse der ersten und M_2 die Masse der zweiten Kugel, A_1 die Anziehung der ersten und A_2 die der zweiten, so haben wir für die Anziehung A der Kugelschaale

$$A = A_1 - A_2 = \frac{M_1}{\alpha^2} - \frac{M_2}{\alpha^2} = \frac{M_1 - M_2}{\alpha^2} = \frac{M}{\alpha^2}$$

wo M die Masse der Kugelschaale bedeutet und vorausgesetzt wird, dass $\alpha > r_1$, also auch $> r_2$ sei. Liegt zweitens der angezogene Punkt in der anziehenden Schaale selbst, ist also $r_2 > \alpha > r_2$, so befindet er sich innerhalb der grösseren, aber ausserhalb der kleineren Kugel, und demnach ist

$$A = \frac{m}{\alpha^2} - \frac{M_2}{\alpha^2} = \frac{m - M_2}{\alpha^2}$$

wobei m die Masse einer mit dem Halbmesser α beschriebenen Kugel bezeichnet; ist endlich $r_1 > r_2 > \alpha$, so liegt der angezogene Punkt

innerhalb der von der Kugelschaale umschlossenen Hohlkugel, also innerhalb M_2 sowohl als M_1, und es ist dann

$$A = \frac{m}{\alpha^2} - \frac{m}{\alpha^2} = 0$$

d. h. der Punkt erleidet gar keine Anziehung, wovon man sich übrigens auch leicht durch eine einfache Betrachtung fast ohne alle Rechnung überzeugen kann.

§. 5.

Anziehung des homogenen dreiachsigen Ellipsoides.

Den angezogenen Punkt nehmen wir zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten, also $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und die Coordinatenachsen legen wir parallel den drei Halbachsen des Ellipsoides, welche letztere a, b und c heissen mögen; die drei Componenten der Anziehung sind in diesem Falle laut Nr. 8) und ohne weitere Rücksicht auf die Vorzeichen

30) $$\begin{cases} A = \int\int\int \Theta \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\omega \, d\vartheta \, d\varrho \\ B = \int\int\int \Theta \cos\omega \sin^2\vartheta \, d\omega \, d\vartheta \, d\varrho \\ C = \int\int\int \Theta \sin\omega \sin^2\vartheta \, d\omega \, d\vartheta \, d\varrho \end{cases}$$

Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung von A, weil bei der symmetrischen Lage des Coordinatensystemes in Beziehung auf a, b, c die Entwickelung von B, C im Wesentlichen dieselbe und nur in der Bezeichnung verschieden sein würde, so dass man B und C auch leichter durch Buchstabenvertauschung erhalten kann. Die Dichtigkeit Θ sei constant, wesshalb man einfacher

31) $$A = \Theta \int\int\int \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\omega \, d\vartheta \, d\varrho$$

schreiben darf. Um nun die Integrationsgränzen für ϱ, ϑ und ω zu bestimmen, dienen folgende Bemerkungen: Verlängert man den Radiusvector $PM = \varrho$ hinreichend, so durchschneidet er die Oberfläche des Ellipsoides in zwei Punkten M_1 und M_2 (Fig. 3 giebt einen blossen Durchschnitt); diese Punkte liegen auf derselben Seite der Geraden PM, wenn der angezogene Punkt P sich ausserhalb des Ellipsoides befindet, dage-

gen liegen sie auf entgegengesetzten Seiten von P aus, wenn P in die anziehende Masse selbst fällt. Nennen wir in jedem Falle r_1 und r_2 die absoluten Längen von PM_1 und PM_2, so sind die Integrationsgränzen in Beziehung auf ϱ

$\varrho = r_2$ bis $\varrho = r_1$ für einen äusseren Punkt P,
$\varrho = -r_2$ bis $\varrho = r_1$ für einen inneren Punkt P.

Die Grössen r_1 und r_2 bestimmen sich leicht, weil M_1 und M_2 Punkte auf der Oberfläche des Ellipsoides sind. Nennen wir r, ϑ, ω die polaren Coordinaten eines solchen Punktes in Beziehung auf das bisherige Coordinatensystem, x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes in Beziehung auf die drei Halbaxen des Ellipsoides als Coordinatenachsen, endlich α, β, γ die ursprünglichen rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes des Ellipsoides, so finden die Gleichungen

$$x = r\cos\vartheta - \alpha$$
$$y = r\sin\vartheta\cos\omega - \beta$$
$$z = r\sin\vartheta\sin\omega - \gamma$$

statt und wenn man diese in die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoides, nämlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

substituirt, so erhält man eine quadratische Gleichung von der Form

32) $$Nr^2 - 2Ur = V,$$

worin zur Abkürzung gesetzt worden ist:

33) $$N = \left(\frac{\cos\vartheta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta\cos\omega}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta\sin\omega}{c}\right)^2$$

34) $$U = \frac{\alpha\cos\vartheta}{a^2} + \frac{\beta\sin\vartheta\cos\omega}{b^2} + \frac{\gamma\sin\vartheta\sin\omega}{c^2}$$

35) $$V = 1 - \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2$$

Die Wurzeln der obigen quadratischen Gleichung, nämlich

$$\frac{U + \sqrt{U^2 + NV}}{N} \text{ und } \frac{U - \sqrt{U^2 + NV}}{N}$$

sind nun unmittelbar die Werthe von r_1 und r_2. Was noch die Integrationsgränzen für ϑ und ω anbelangt, so gestalten sich diese sehr einfach; für ϑ gelten nämlich die Gränzen $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ und für ω die Werthe

$\omega = 0$ bis $\omega = \pi$, wie man unmittelbar erkennen wird. Nach alle diesen Bemerkungen ist nun für einen ausserhalb liegenden Punkt P

$$A = \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{r_2}^{r_1} d\varrho$$

für einen im Ellipsoid selbst liegenden Punkt ist dagegen

$$A = \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{-r_2}^{r_1} d\varrho.$$

Die in Beziehung auf ϱ angedeutete Integration lässt sich unmittelbar ausführen und giebt im ersten Falle

$$A = \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, [r_1 - r_2]$$

$$= \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0 \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, \frac{2\sqrt{U^2 + NV}}{N}$$

und im zweiten Falle

$$A = \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, [r_1 + r_2]$$

$$= \Theta \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, \frac{2U}{N}.$$

Man erkennt hieraus, dass die Berechnung der Anziehung eines Ellipsoides im zweiten Falle bei weitem einfacher ist als im ersten, wo man es unter dem Integralzeichen mit einer sehr verwickelten Wurzelgrösse zu thun bekommen würde; wir beschränken uns daher auf den Fall eines im Innern liegenden Punktes. Vermöge des Werthes von U ist dann

36) $$A = \frac{2\alpha\Theta}{a^2} \int_0^\pi d\omega \int_0^\pi \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{N}$$

$$+ \frac{2\beta\Theta}{b^2} \int_0^\pi \cos\omega \, d\omega \int_0^\pi \frac{\cos\vartheta \sin^2\vartheta \, d\vartheta}{N}$$

$$+ \frac{2\gamma\Theta}{c^2} \int_0^\pi \sin\omega \, d\omega \int_0^\pi \frac{\cos\vartheta \sin^2\vartheta \, d\vartheta}{N}.$$

Die drei auf ϑ bezüglichen Integrale stehen unter der gemeinschaftlichen Form

$$\int_0^{\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta;$$

zerlegte man dieses in die beiden folgenden

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta$$

und setzt im ersten $\vartheta = \vartheta'$, dagegen im zweiten $\vartheta = \pi - \vartheta'$, so wird

$$\int_0^{\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\vartheta')\, d\vartheta' - \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} f(\pi - \vartheta')\, d\vartheta'$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\vartheta')\, d\vartheta' + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\pi - \vartheta')\, d\vartheta'$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ f(\vartheta') + f(\pi - \vartheta') \right\} d\vartheta'.$$

Bleibt nun die Funktion $f(\vartheta')$ im zweiten Quadranten dieselbe wie im ersten, d. h. besitzt sie die Eigenschaft $f(\vartheta') = f(\pi - \vartheta')$, so hat man nach dem Obigen

$$\int_0^{\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta$$

ist dagegen $f(\vartheta') = -f(\pi - \vartheta')$, so verschwindet das zwischen den Gränzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ genommene Integral von $f(\vartheta)\, d\vartheta$. Nun besitzt aber der Ausdruck

$$f(\vartheta) = \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta}{N}$$

die erste Eigenschaft $f(\vartheta') = f(\pi - \vartheta')$ und daher kann man im ersten Integrale der Gleichung 36) die Gränzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ einführen, indem man zugleich das Integral doppelt nimmt. Die Funktion

$$f(\vartheta) = \frac{\cos\vartheta \sin^2\vartheta}{N}$$

besitzt dagegen die zweite Eigenschaft $f(\vartheta') = -f(\pi - \vartheta')$ und daher verschwinden die beiden anderen Integrale, indem sie aus sich gegenseitig hebenden Elementen bestehen. So vereinfacht sich der Werth von A bedeutend und reducirt sich auf

$$A = \frac{4\alpha\Theta}{a^2} \int_0^{\pi} d\omega \int_0^{1/2\,\pi} \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{N}$$

daraus wird durch Umkehrung der Integrationsordnung

$$A = \frac{4\alpha\Theta}{a^2} \int_0^{1/2\,\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{N}.$$

Hinsichtlich des in Beziehung auf ω genommenen Integrales gilt nun dieselbe Bemerkung wie früher; da nämlich die Funktion $\frac{1}{N}$ von $\omega = \frac{1}{2}\pi$ bis $\omega = \pi$ dieselben Werthe annimmt, die sie schon von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{1}{2}\pi$ hatte, so kann man einfacher schreiben

37) $$A = \frac{8\alpha\Theta}{a^2} \int_0^{1/2\,\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \int_0^{1/2\,\pi} \frac{d\omega}{N}.$$

Die auf ω bezügliche Integration ist sehr leicht ausführbar, wenn man in dem Werthe von N

$$\left(\frac{\cos\vartheta}{a}\right)^2 = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2}(\cos^2\omega + \sin^2\omega)$$

setzt, wodurch derselbe die symmetrische Form

$$N = p^2\cos^2\omega + q^2\sin^2\omega$$

annimmt, bei welcher p und q als Abkürzungszeichen dienen, nämlich

$$p^2 = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}$$

$$q^2 = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}.$$

Es ist dann nach einer sehr bekannten Formel

$$\int_0^{1/2\,\pi} \frac{d\omega}{N} = \int_0^{1/2\,\pi} \frac{d\omega}{p^2\cos^2\omega + q^2\sin^2\omega} = \frac{1}{pq} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und mithin durch Einführung dieses Werthes

$$A = \frac{4\pi\Theta\alpha}{a^2}\int_0^{1/2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{\left\{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right\}\left\{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right\}}}$$

oder auch

$$A=4\pi\Theta\,\alpha\,b\,c\int_0^{1/2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{(a^2\sin^2\vartheta+b^2\cos^2\vartheta)\,(a^2\sin^2\vartheta+c^2\cos^2\vartheta)}}.$$

Durch Einführung einer neuen Variabeln $\cos\vartheta=t$, also $\sin\vartheta\,d\vartheta = -dt$ und $\sin^2\vartheta = 1-t^2$, gestaltet sich dieser Ausdruck wie folgt:

$$38)\qquad A=4\pi\Theta\alpha b c\int_0^1\frac{t^2\,dt}{\sqrt{[a^2(1-t^2)+b^2t^2][a^2(1-t^2)+c^2t^2]}}$$

und man hat nun entsprechend durch Buchstabenvertauschung

$$39)\qquad B=4\pi\Theta\beta a c\int_0^1\frac{t^2\,dt}{\sqrt{[b^2(1-t^2)+a^2t^2][b^2(1-t^2)+c^2t^2]}}$$

$$40)\qquad C=4\pi\Theta\gamma a b\int_0^1\frac{t^2\,dt}{\sqrt{[c^2(1-t^2)+a^2t^2][c^2(1-t^2)+b^2t^2]}}.$$

Hier bedeuten α, β, γ die Coordinaten des Ellipsoidmittelpunktes, bezogen auf drei durch den angezogenen Punkt parallel zu den Ellipsoidachsen gelegte Coordinatenachsen; will man dagegen, wie es bequemer ist, die Achsen des Ellipsoides zu Coordinatenachsen nehmen, so müssen $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$ an die Stellen von α, β, γ gesetzt werden. Hierdurch ändern A, B, C nur ihre Vorzeichen, was wir weiter nicht zu beachten brauchen, da es uns nur auf die Grössen dieser Componenten, nicht aber darauf ankommt, in welchem Sinne sie wirken, indem letzterer unmittelbar bekannt ist. Wir können daher die vorigen Formeln ungeändert beibehalten, wenn wir unter A, B, C die absoluten Intensitäten der Anziehungscomponenten und unter α, β, γ die Coordinaten des angezogenen Punktes verstehen, wobei letztere auf die Achsen des Ellipsoides als Coordinatenachsen bezogen sind.

§. 6.

Formeln für das Rotationsellipsoid.

Die Ausführung der in den Gleichungen 38), 39) und 40) angedeuteten Integrationen ist durch logarithmische und cyklometrische Funktionen nicht möglich, weil die unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Ausdrücke vom vierten Grade sind. Man muss desshalb die Integrale entweder auf elliptische Funktionen zurückführen, wie es *Legendre* gethan hat, oder sie in unendliche Reihen verwandeln, oder endlich ihre Werthe nach der sogenannten Methode der Quadraturen berechnen. Es giebt indessen einen Fall, in welchem die Integration auf dem gewöhnlichen Wege bewerkstelligt werden kann, wenn nämlich zwei von den Achsen des Ellipsoides gleich sind, also das dreiachsige Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid übergeht. Nehmen wir ein- für allemal $a > b$, so kann nun entweder $c = b$ oder $c = a$ sein; das erste giebt ein gestrecktes, das zweite ein abgeplattetes Rotationsellipsoid; zugleich wollen wir die beiden Verhältnisse, in welchen die lineare Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ zu den beiden Halbachsen steht, mit ε und λ bezeichnen:

41) $$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

I. Für den Fall eines gestreckten Rotationsellipsoides ($c = b$) gehen die Formeln 38), 39), 40) in folgende über:

$$A = 4\pi\Theta\alpha\,\frac{b^2}{a}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{1 - \varepsilon^2 t^2}$$

$$B = 4\pi\Theta\beta\,\frac{a}{b}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1 + \lambda^2 t^2}}$$

$$C = 4\pi\Theta\gamma\,\frac{a}{b}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1 + \lambda^2 t^2}}.$$

Erinnert man sich an die bekannten Formeln der unbestimmten Integration

$$\int \frac{t^2\,dt}{1-\varepsilon^2 t^2} = \frac{1}{\varepsilon^3}\left[\tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{1+\varepsilon t}{1-\varepsilon t}\right) - \varepsilon t\right] + Const.$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+\lambda^2 t^2}} = \frac{1}{2\lambda^3}\left[\lambda t\sqrt{1+\lambda^2 t^2} - l(\lambda t + \sqrt{1+\lambda^2 t^2})\right] + Const.$$

so ergeben sich für die Anziehungscomponenten folgende Werthe:

42) $$A = 4\pi\Theta\,.\,\frac{\alpha b^2}{a^2 \varepsilon^3}\left[\tfrac{1}{2}\, l\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) - \varepsilon\right]$$

43) $$B = 2\pi\Theta\,.\,\frac{\beta a}{b\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2} - l(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})\right]$$

44) $$C = 2\pi\Theta\,.\,\frac{\gamma a}{b\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2} - l(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})\right].$$

II. Für den Fall eines abgeplatteten Rotationsellipsoides ($c = a$) nehmen die Formeln für A, B, C folgende Gestalten an:

$$A = 4\pi\Theta\alpha\frac{b}{a}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-\varepsilon^2 t^2}}$$

$$B = 4\pi\Theta\beta\frac{a^2}{b^2}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+\lambda^2 t^2}}$$

$$C = 4\pi\Theta\gamma\frac{b}{a}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-\varepsilon^2 t^2}}.$$

Unter Anwendung der bekannten Formeln für unbestimmte Integration

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-\varepsilon^2 t^2}} = \frac{Arcsin\,(\varepsilon t) - \varepsilon t\sqrt{1-\varepsilon^2 t^2}}{2\varepsilon^3} + Const.$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{1+\lambda^2 t^2} = \frac{\lambda t - Arctan\,(\lambda t)}{\lambda^3} + Const.$$

ergeben sich für A, B, C die nachstehenden Werthe:

45) $$A = 2\pi\Theta\frac{\alpha b}{a}\,\frac{Arcsin\,\varepsilon - \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}$$

46) $$B = 4\pi\Theta\frac{\beta a^2}{b^2}\,\frac{\lambda - Arctan\,\lambda}{\lambda^3}$$

47) $$C = 2\pi\Theta\frac{\gamma b}{a}\,\frac{Arcsin\,\varepsilon - \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}.$$

Bleiben wir bei dem Falle des abgeplatteten Ellipsoides, als dem in der Planetenwelt vorkommenden, noch einen Augenblick stehen.

Sind die numerische Excentricität ε und das Abplattungsmaass λ sehr kleine Brüche, wie wirklich in der Natur, so ist es vortheilhaft, die Grössen $Arcsin\,\varepsilon$, $\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}$ und $Arctan\,\lambda$ in Potenzenreihen zu verwandeln, und man findet auf diese Weise:

$$A = 2\pi\,\Theta\,\frac{\alpha b}{a}\left\{\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{28}\varepsilon^4 + \ldots\right\}$$

$$B = 4\pi\,\Theta\,\frac{\beta a^2}{b^2}\left\{\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\lambda^2 + \tfrac{1}{7}\lambda^4 - \ldots\right\}$$

$$C = 2\pi\,\Theta\,\frac{\gamma b}{a}\left\{\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{28}\varepsilon^4 + \ldots\right\}$$

und wenn man die Masse des abgeplatteten Rotationsellipsoides $M = \frac{4}{3}a^2 b\pi\Theta$ in Rechnung bringt

48) $$A = \frac{M\alpha}{a^3}\left\{1 + \tfrac{3}{10}\varepsilon^2 + \tfrac{9}{56}\varepsilon^4 + \ldots\ldots\right\}$$

49) $$B = \frac{M\beta}{b^3}\left\{1 - \tfrac{3}{5}\lambda^2 + \tfrac{3}{7}\lambda^4 - \ldots\ldots\right\}$$

50) $$C = \frac{M\gamma}{a^3}\left\{1 + \tfrac{3}{10}\varepsilon^2 + \tfrac{9}{56}\varepsilon^4 + \ldots\ldots\right\}$$

Für die Kugel ist noch $b = a$ zu setzen, wo nun a den Halbmesser derselben bezeichnet; zugleich wird $M = \frac{4}{3}a^3\pi\Theta$, ε und λ verschwinden. Man hat dann einfacher

$$A = \frac{M\alpha}{a^3}\quad,\quad B = \frac{M\beta}{a^3}\quad,\quad C = \frac{M\gamma}{a^3}$$

folglich für die Resultante dieser Kräfte

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{M}{a^3}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi\,\Theta . E,$$

wo E die Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte der Kugel bezeichnet. Dieses Resultat stimmt, wie es sein muss, mit Dem überein, was wir auf anderem Wege in §. 4. entwickelt haben.

§. 7.

Das Reduktionstheorem von Ivory.

Um den Schwierigkeiten auszuweichen, welche die Integration eines verwickelten Radikales mit sich führt, sahen wir uns in §. 5. gezwungen, vorläufig auf die Berechnung der Kraft, womit das Ellipsoid einen aussenliegenden Punkt anzieht, zu verzichten. Wir kommen jetzt zu diesem Probleme zurück, um es von einer wesentlich anderen Seite zu betrachten, bei welcher die Unterscheidung eines inneren oder äusseren Punktes keinen so bedeutenden Unterschied in den Formeln hervorruft.

Nehmen wir die Achsen des Ellipsoides zu Coordinatenachsen und bezeichnen den angezogenen Punkt mit $\alpha\beta\gamma$, so ist die in der Richtung der x-Achse wirkende Componente der Anziehung

51) $$A = \Theta\int\int\int\frac{(\alpha-x)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}^3}$$

indem wir die Dichtigkeit als unveränderlich voraussetzen.

Die angedeuteten Integrationen sind hier auf alle im Innern des Ellipsoides liegenden Punkte (Elemente) xyz zu erstrecken und aus dieser Bedingung die Integrationsgränzen zu bestimmen. Diese Bestimmung richtet sich nach der Reihenfolge, in welcher man die Integrationen ausführen will; da nun aus dem blossen Anblicke des Integrales erhellt, dass sich die auf x bezügliche Integration leicht ausführen lässt, nämlich

$$\int\frac{(\alpha-x)\,dx}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}},$$

so ist es am natürlichsten, mit der auf x bezüglichen Integration anzufangen, also etwa die Reihenfolge x, y, z einzuhalten.

In Fig. 4. seien $OA=a$, $OB=b$ und $OC=c$ die drei Halbaxen des Ellipsoides, die drei Coordinatenachsen, F bezeichne einen beliebigen Punkt im Innern des Ellipsoides, welcher durch die drei Coordinaten $FG=x$, $GH=y$, $HO=z$ bestimmt ist. Verlängern wir die Coordinate FG, bis sie die Oberfläche des Ellipsoides in zwei Punkten F' und F'' schneidet (die Figur giebt nur den ersten Punkt), so sind die Gränzen für x offenbar $x=F''G$ bis $x=F'G$, oder $x=-F'G$ bis $x=+F'G$. Die Länge $F'G$ ist sehr leicht zu bestimmen, wenn man sich erinnert, dass F' ein Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoides ist und dass folg-

lich seine Coordinaten $F'G$, $GH = y$ und $HO = z$ der Gleichung der Ellipsoidoberfläche genügen müssen. Bezeichnen wir $F'G$ mit X, so muss demnach

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

sein und hieraus findet sich der Werth von X; die Gränzen für x sind also

52) $$\begin{cases} x = -X \text{ bis } x = +X \\ X = a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2}. \end{cases}$$

Verlängern wir ferner $GH = y$, bis diese Gerade die Oberfläche in zwei Punkten G' und G'' trifft, so sind $y = G''H$ bis $y = G'H$, oder $y = -G'H$ bis $y = +G'H$ die Gränzen für y. Da auch der Punkt G' auf der Oberfläche des Ellipsoides liegt, so müssen seine Coordinaten wiederum die Gleichung der Ellipsoidoberfläche erfüllen. Für $G'H = Y$ sind diese Coordinaten: Null, Y und z, mithin ist

$$\left(\frac{Y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

und die Gränzen für y sind:

53) $$\begin{cases} y = -Y \text{ bis } y = +Y \\ Y = b\sqrt{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2}. \end{cases}$$

Die Gränzen für z endlich ergeben sich, wenn man $OH = z$ verlängert, bis diese Gerade die Ellipsoidoberfläche in zwei Punkten C und C' schneidet; diese Gränzen sind

$$z = -c \text{ bis } z = +c.$$

Nach diesen Erörterungen ist nun

$$A = \Theta \int_{-c}^{+c} dz \int_{-Y}^{+Y} dy \int_{-X}^{+X} \frac{(a - x)\, dx}{\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}^3}$$

wo statt X und Y die in 52) und 53) verzeichneten Werthe zu setzen wären. Sämmtliche Integrationsgränzen hängen von a, b, c ab und würden daher für ein zweites Ellipsoid nicht dieselben sein; um aber von a, b, c unabhängige Integrationsgränzen zu erhalten, bedarf es nur der Einführung dreier neuen Variabeln

$$x = a\xi,\ y = b\eta,\ z = c\zeta;$$

man hat dann zunächst

$$A = \Theta\, a\, b\, c \int d\zeta \int d\eta \int \frac{(\alpha - a\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}^3}$$

und wenn $x = X$ geworden ist, würde $a\xi = X$, d. h.

$$\xi = \frac{X}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2}$$

geworden sein; ebenso geht für $y = Y$, $b\eta$ in Y über und es ist

$$\eta = \frac{Y}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - \zeta^2};$$

dem Werthe $z = c$ entspricht endlich $\zeta = 1$. Bezeichnen wir nun wie folgt:

54) $$\Xi = \sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2}\ ,\quad \Omega = \sqrt{1 - \zeta^2},$$

so nimmt die Formel für A folgende Gestalt an:

$$A = \Theta\, a\, b\, c \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\Omega}^{+\Omega} d\eta \int_{-\Xi}^{+\Xi} \frac{(\alpha - a\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}^3}$$

und hier können wir die auf ξ bezügliche Integration ausführen, indem wir

$$\int \frac{(\alpha - a\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}^3} = \frac{1}{a}\, \frac{1}{\sqrt{(\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}}$$

und nachher für ξ die Gränzwerthe $+\Xi$ und $-\Xi$ setzen. So ergiebt sich ein Resultat von der Form

55) $$A = \Theta\, b\, c \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\Omega}^{+\Omega} d\eta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

worin r und R zur Abkürzung benutzt worden sind; nämlich

$$r = \sqrt{(\alpha - a\Xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}$$
$$R = \sqrt{(\alpha + a\Xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}.$$

Entwickelt man die unter dem Radikale stehenden Quadrate und setzt statt Ξ seinen Werth, so findet man ohne Mühe

56) $$\begin{aligned} r^2 = {} & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a^2 \\ & - 2a\alpha\sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2} - 2b\beta\eta - 2c\gamma\zeta \\ & - (a^2 - b^2)\eta^2 - (a^2 - c^2)\zeta^2 \end{aligned}$$

57) $$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a^2 + 2a\alpha\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2} - 2b\beta\eta - 2c\gamma\zeta - (a^2-b^2)\eta^2 - (a^2-c^2)\zeta^2.$$

Ohne nun einen Versuch zur weiteren Integration in No. 55) zu machen, betrachten wir jetzt ein zweites Ellipsoid mit den neuen Halbachsen a_1, b_1, c_1, welches einen zweiten Punkt $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ anzieht. Die Componente A_1 desselben wird dann durch die entsprechenden Formeln

58) $$A_1 = \Theta b_1 c_1 \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\Omega}^{+\Omega} d\eta \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_1}\right)$$

59) $$r_1{}^2 = \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2 + a_1{}^2 - 2a_1\alpha_1\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2} - 2b_1\beta_1\eta - 2c_1\gamma_1\zeta - (a_1{}^2-b_1{}^2)\eta^2 - (a_1{}^2-c_1{}^2)\zeta^2$$

60) $$R_1{}^2 = \alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2 + a_1{}^2 + 2a_1\alpha_1\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2} - 2b_1\beta_1\eta - 2c_1\gamma_1\zeta - (a_1{}^2-b_1{}^2)\eta^2 - (a_1{}^2-c_1{}^2)\zeta^2$$

bestimmt, indem wir voraussetzen, dass das zweite Ellipsoid mit dem ersten gleiche Dichtigkeit besitze. Könnte man nun die sechs Grössen a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 so bestimmen, dass $r_1 = r$ und zugleich $R_1 = R$ wäre, so würde das in 55) vorkommende Doppelintegral dem in No. 58) vorkommenden identisch sein und man hätte dann durch Division

$$\frac{A}{A_1} = \frac{b\,c}{b_1\,c_1}$$

also eine sehr einfache Beziehung zwischen A und A_1.

Aus der Vergleichung von r und r_1, sowie von R und R_1 ergeben sich nun folgende sechs Gleichungen:

61) $$\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2 + a_1{}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a^2$$

62) $$a_1\alpha_1 = a\alpha,\quad b_1\beta_1 = b\beta,\quad c_1\gamma_1 = c\gamma$$

63) $$a_1{}^2 - b_1{}^2 = a^2 - b^2,\quad a_1{}^2 - c_1{}^2 = a^2 - c^2.$$

Bleiben wir zunächst bei den zwei letzten Gleichungen stehen, aus welchen durch Subtraction noch

64) $$b_1{}^2 - c_1{}^2 = b^2 - c^2$$

folgt, so erkennen wir, dass das gesuchte Ellipsoid dieselben linearen Excentricitäten besitzt wie das gegebene, dass also beide Ellipsoide con-

fokal sind. Wir geben nun den Gleichungen 63) und 64) die bessere Form

$$a_1{}^2 - a^2 = b_1{}^2 - b^2 = c_1{}^2 - c^2$$

und nennen ω den gemeinschaftlichen, noch unbekannten Werth dieser drei Quadratdifferenzen; aus

$$a_1{}^2 - a^2 = \omega, \quad b_1{}^2 - b^2 = \omega, \quad c_1{}^2 - c^2 = \omega$$

folgen dann die Gleichungen

65) $$a_1 = \sqrt{a^2 + \omega}, \quad b_1 = \sqrt{b^2 + \omega}, \quad c_1 = \sqrt{c^2 + \omega},$$

welche zur Bestimmung der Halbachsen des neuen Ellipsoides dienen, sobald ω erst bekannt ist. Die Gleichungen 62) geben nun weiter die Coordinaten α_1, β_1, γ_1 des vom zweiten Ellipsoide angezogenen Punktes, nämlich

66) $$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{a\alpha}{a_1} = \dfrac{a\alpha}{\sqrt{a^2 + \omega}} \\[2ex] \beta_1 = \dfrac{b\beta}{b_1} = \dfrac{b\beta}{\sqrt{b^2 + \omega}} \\[2ex] \gamma_1 = \dfrac{c\gamma}{c_1} = \dfrac{c\gamma}{\sqrt{c^2 + \omega}}. \end{cases}$$

Um endlich ω zu bestimmen, substituiren wir die für a_1, b_1, c_1 und α_1, β_1, γ_1 gefundenen Werthe in die Gleichung 61), nachdem wir letztere in der besseren Form

$$\alpha^2 - \alpha_1{}^2 + \beta^2 - \beta_1{}^2 + \gamma^2 - \gamma_1{}^2 = a_1{}^2 - a^2$$

dargestellt haben; es folgt dann

$$\frac{\alpha^2\omega}{a^2 + \omega} + \frac{\beta^2\omega}{b^2 + \omega} + \frac{\gamma^2\omega}{c^2 + \omega} = \omega$$

und diese Gleichung ist auf doppelte Weise erfüllbar, entweder durch $\omega = 0$, oder durch

67) $$\frac{\alpha^2}{a^2 + \omega} + \frac{\beta^2}{b^2 + \omega} + \frac{\gamma^2}{c^2 + \omega} = 1.$$

Im ersten Falle würde das zweite Ellipsoid dem ersten congruent und $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ mit $\alpha\beta\gamma$ identisch sein, was nichts der Aufmerksamkeit Werthes giebt. Bedeutender dagegen ist der zweite Fall, der auf eine cubische Gleichung führt und demnach wenigstens einen reellen Werth von ω liefert. Da unter diesen Umständen r mit r_1, R mit R_1 identisch wird, so können wir jetzt folgendes Theorem aussprechen:

Wenn ein Ellipsoid einen Punkt anzieht, so giebt es immer ein zweites confokales Ellipsoid der Art, dass die Componenten der Anziehungen, welche das erste Ellipsoid auf den gegebenen Punkt und das zweite auf einen anderen Punkt ausüben, den Produkten aus den einschliessenden Achsen proportional sind, nämlich

68) $$A : A_1 = bc : b_1 c_1.$$

Dieser Satz gestattet eine sehr elegante Anwendung auf den Fall, wenn der Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausserhalb des ersten Ellipsoides liegt, also

69) $$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} > 1$$

ist. Bezeichnen wir nämlich die linke Seite der Gleichung 67) mit $F(\omega)$ und lassen wir ω von 0 bis ∞ wachsen, so ist $F(\omega)$ eine fortwährend abnehmende Funktion von ω; im Anfange hat man wegen Nr. 69) $F(0) > 1$, nachher $F(\infty) = 0 < 1$ und mithin giebt es einen einzigen positiven Werth von ω, für welchen $F(\omega) = 1$ wird. Nehmen wir also für ω die einzige reelle positive Wurzel der Gleichung 67), so folgt aus No. 65), dass das zweite Ellipsoid grössere Halbaxen besitzt als das erste, und aus No. 66), dass der Punkt $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ dem Coordinatenanfange näher liegt als $\alpha\beta\gamma$. Durch Substitution von 65) in 67) wird

$$\frac{\alpha^2}{{a_1}^2} + \frac{\beta^2}{{b_1}^2} + \frac{\gamma^2}{{c_1}^2} = 1$$

d. h. der Punkt $\alpha\beta\gamma$ liegt auf der Oberfläche des zweiten Ellipsoides drückt man mittelst der Gleichungen 66) α_1, β_1, γ_1 durch α, β, γ aus,; so geht die vorige Gleichung in die folgende über:

$$\frac{{\alpha_1}^2}{a^2} + \frac{{\beta_1}^2}{b^2} + \frac{{\gamma_1}^2}{c^2} = 1$$

d. h. der Punkt $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ liegt auf der Oberfläche des ersten Ellipsoides, also im Innern des zweiten Ellipsoides. Vermöge dieser Eigenschaft kann man A_1 nach den Formeln der §§. 5. und 6. berechnen und dann ergiebt sich A mittelst der Proportion $A : A_1 = bc : b_1 c_1$. So gelangen wir zu folgendem Endresultate:

Um die Anziehung zu berechnen, welche ein homogenes Ellipsoid E auf einen aussenliegenden Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausübt, construire man zunächst ein dem ersten confokales Ellipsoid E_1, dessen Oberfläche durch $\alpha\beta\gamma$ geht und dessen Dichtigkeit der von E gleich ist. Die-

ses zweite Ellipsoid E_1 lasse man auf einen Punkt $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ wirken, der auf der Oberfläche von E, also im Innern von E_1 liegt, und dessen Coordinaten nach den Formeln 66) bestimmt werden. Aus den Componenten A_1, B_1, C_1 der von E_1 auf $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ ausgeübten Anziehung leitet man nachher die gesuchten Componenten A, B, C mittelst der Formeln ab:

$$A = \frac{b\,c}{b_1\,c_1} A_1 \quad , \quad B = \frac{a\,c}{a_1\,c_1} B_1 \quad , \quad C = \frac{a\,b}{a_1\,b_1} C_1 .$$

Wenden wir diess auf das abgeplattete Rotationsellipsoid ($c = a > b$) an, so haben wir unter ω die positive Wurzel der quadratischen Gleichung

70) $$\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{a^2 + \omega} + \frac{\beta^2}{b^2 + \omega} = 1$$

zu verstehen und es ist nun

$$a_1 = \sqrt{a^2 + \omega} = c_1 \quad , \quad b_1 = \sqrt{b^2 + \omega}$$

für die Excentricität und Abplattung des neuen Ellipsoides gelten die Formeln

71) $$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{a_1^{\,2} - b_1^{\,2}}}{a_1} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + \omega}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \frac{\omega}{a^2}}}$$

72) $$\lambda_1 = \frac{\sqrt{a_1^{\,2} - b_1^{\,2}}}{b_1} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 + \omega}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{\omega}{b^2}}}$$

und für den neuen Punkt $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ sind die Coordinaten

73) $$\alpha_1 = \frac{a\,\alpha}{\sqrt{a^2 + \omega}} \; , \; \beta_1 = \frac{b\,\beta}{\sqrt{b^2 + \omega}} \; , \; \gamma_1 = \frac{a\,\gamma}{\sqrt{a^2 + \omega}} .$$

Die Componente A bestimmt sich nun wie folgt:

$$A = \frac{b\,a}{b_1\,a_1} . 2\pi\,\Theta\, \frac{\alpha_1\,b_1}{a_1} \, \frac{Arcsin\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\sqrt{1 - \varepsilon_1^{\,2}}}{\varepsilon_1^{\,3}}$$

oder nach Substitution der Werthe von a_1, b_1 und α_1

74) $$A = 2\pi\,\Theta\,\alpha\, \frac{a^2\,b}{\sqrt{a^2 + \omega}^{\,3}} \, \frac{Arcsin\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\,\sqrt{1 - \varepsilon_1^{\,2}}}{\varepsilon_1^{\,3}}$$

wo nur noch die Werthe von ε_1 und ω aus 71) und 70) einzusetzen wären, was wir unterlassen, um die Formel nicht zu compliziren. Für B und C erhält man ebenso leicht:

75) $$B = 4\pi\,\Theta\beta\,\frac{a^2 b}{\sqrt{b^2+\omega}^3}\,\frac{\lambda_1 - Arctan\,\lambda_1}{\lambda_1^3}$$

76) $$C = 2\pi\,\Theta\gamma\,\frac{a^2 b}{\sqrt{a^2+\omega}^3}\,\frac{Arcsin\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^3}.$$

Für die Kugel ($b = a$) wird $\omega = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2$, und die Ausdrücke rechter Hand gehen bezüglich in $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ über; man erhält so drei Componenten, deren Resultante

$$R = \tfrac{4}{3}a^3\pi\,\Theta\,.\,\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

ist, was mit dem Früheren übereinstimmt.

§. 8.

Anziehung eines aus ähnlichen Schichten bestehenden Ellipsoides.

Wir betrachten jetzt allgemeiner die Anziehung, welche ein Ellipsoid von ungleichförmiger Dichtigkeit auf einen beliebigen Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausübt, und um über das Gesetz der Dichtigkeitsveränderung innerhalb des Ellipsoides eine bestimmte Annahme zu haben, wollen wir voraussetzen, dass die Dichtigkeit im Punkte xyz durch

77) $$\Theta = f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

ausgedrückt werde, wo f eine beliebige Funktion bezeichnet. Die statische Bedeutung dieser Supposition ist sehr einfach; alle diejenigen Elemente nämlich, für welche die eingeklammerte Summe einen constanten Werth erhält, etwa

78) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = s$$

oder

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{s}}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\sqrt{s}}\right)^2 + \left(\frac{z}{c\sqrt{s}}\right)^2 = 1$$

liegen auf der Oberfläche eines mit den Halbachsen $a\sqrt{s}$, $b\sqrt{s}$ und $c\sqrt{s}$ beschriebenen Ellipsoides, welches dem ursprünglichen Ellipsoide ähnlich ist; einem individuellen Werthe von s entspricht also eine unend lich dünne homogene ellipsoidische Schaale und die Aenderung von s giebt den Uebergang von einer solchen Schicht zur anderen. Unter der

gemachten Voraussetzung besteht demnach das Ellipsoid aus einer stetigen Folge ähnlicher Schichten, deren jede für sich homogen ist, während die Dichtigkeit von Schicht zu Schicht wechselt. Das Potenzial der Anziehung ist nunmehr

79) $$P = \int\int\int \frac{f(s)\; dx\; dy\; dz}{\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}}$$

und darin beziehen sich die drei Integrationen auf alle im Innern des Ellipsoides liegenden Elemente, d. h. auf alle die positiven und negativen x, y, z, welche der Ungleichung

$$1 > \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 > 0$$

oder $$1 > s > 0$$

Genüge leisten. Führen wir zur Vermeidung von Brüchen drei neue Variable ξ, η, ζ ein, welche durch die Gleichungen $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$ bestimmt werden, so ist einfacher

80) $$s = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

81) $$P = abc \int\int\int \frac{f(s)\; d\xi\; d\eta\; d\zeta}{\sqrt{(\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2}}$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven und negativen der Ungleichung

82) $$1 > \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 0 \text{ oder } 1 > s > 0$$

genügenden ξ, η, ζ beziehen. — Zur Ausführung dieser dreifachen Integration würden nun die bisher angewendeten Mittel nicht mehr zureichen und wir bedienen uns daher einer wesentlich verschiedenen Methode, deren Grundzüge von *Lejeune Dirichlet* entwickelt worden sind, und welche im Wesentlichen darauf hinauskommt, das zu reduzirende vielfache Integral mit einem Faktor zu multipliziren, welcher eine endliche Grösse besitzt oder verschwindet, je nachdem die Bedingungsgleichung des Integrales [hier No. 82)] erfüllt oder nicht erfüllt ist. Um diesen Kunstgriff hier anwenden zu können, erinnern wir an das Theorem von *Fourier*, demzufolge der Werth des Doppelintegrales *)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos s\omega\; d\omega \int_0^1 f(\vartheta) \cos \omega\vartheta\; d\vartheta$$

*) s. Note III.

$= f(s)$ oder gleich Null ist, je nachdem die positive Grösse s weniger oder mehr als die Einheit beträgt; wir haben daher auch

$$83)\quad P = abc\frac{2}{\pi}\iiint\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}\int_0^\infty \cos s\omega\,d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta,$$

wo r als Abkürzung benutzt worden ist, nämlich

$$84)\quad r^2 = (\alpha - a\xi)^2 + (\beta - b\eta)^2 + (\gamma - c\zeta)^2.$$

In dem für P angegebenen Integrale lassen sich aber die auf ξ, η, ζ bezüglichen Integrationen auf beliebig erweiterte Gränzen ausdehnen; da nämlich das als Faktor zugesetzte Doppelintegral für $s > 1$ verschwindet, so werden hierdurch alle Elemente, welche der Bedingung $s < 1$ nicht genügen, von selbst ausgeschieden. Setzen wir

$$85)\quad P = \frac{2}{\pi}abc\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}\int_0^\infty \cos s\omega\,d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta,$$

so wäre diess das Potenzial der vom unendlichen Raume auf den Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausgeübten Anziehung, jedoch mit der Rücksicht, dass im Innern eines gegebenen Ellipsoides (d. h. für $s < 1$) die Dichtigkeit $= f(s)$, ausserhalb desselben $= 0$ wäre, was mit dem Potenziale des Ellipsoides auf Dasselbe hinauskommt, weil der leere Raum keine Anziehung ausübt. Wir haben uns daher einzig und allein mit dem Integrale in No. 85) zu beschäftigen, statt dessen wir auch das folgende

$$86)\quad Q = \frac{2}{\pi}abc\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}\int_0^\infty e^{s\omega i}\,d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta$$

betrachten können, von welchem P den reellen Bestandtheil ausmacht, wenn i die Wurzel $\sqrt{-1}$ bedeutet.

Versparen wir die auf ϑ und ω bezüglichen Integrationen bis zuletzt, so ist auch

$$Q = \frac{2}{\pi}abc\int_0^\infty d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}e^{s\omega i}$$

wobei es zunächst auf die Ausführung der drei für ξ, η, ζ geltenden Integrationen ankommt; wir setzen daher

$$87)\qquad Q=\frac{2}{\pi}\,a\,b\,c\int_0^\infty d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta\;.\;S,$$

wobei S als Abkürzung dient und sich die Aufmerksamkeit nunmehr auf die Gleichung

$$88)\qquad S=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi\;d\eta\;d\zeta}{r}\,e^{s\omega i}$$

zu richten hat. Der Uebersichtlichkeit wegen widmen wir dieser Reduktion einen besonderen Paragraphen.

§. 9.

Fortsetzung.

Unmittelbar ist die für S angegebene dreifache Integration nicht ausführbar, sie wird es aber auf der Stelle, sobald man den unbequemen Faktor $\frac{1}{r}$ selbst wieder in ein bestimmtes Integral verwandelt. Nach einer bekannten Formel hat man nämlich*)

$$\int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\,e^{k\psi i}=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}$$

folglich umgekehrt, wenn $k=r^2$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}\pi i}\int_0^\infty\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\,e^{r^2\psi i}.$$

Durch Substitution dieses Werthes geht die Gleichung

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\;d\eta\;d\zeta\,e^{s\omega i}\,\frac{1}{r}$$

in die folgende über:

$$S=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\;d\eta\;d\zeta\;e^{s\omega i}\int_0^\infty\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\,e^{r^2\psi i}$$

und in dieser versparen wir die auf ψ bezügliche Integration bis zuletzt; es ist dann

*) s. Note IV.

89) $$S=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}\pi i}\int_0^\infty\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{(s\omega+r^2\psi)i}.$$

Die drei auf ξ, η, ζ bezüglichen Integrationen können jetzt mit einem Schlage ausgeführt werden. Vermöge der Werthe von s und r^2 ist nämlich bei vollständiger Entwickelung

$$\begin{aligned} s\omega+r^2\psi=&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\psi\\ &+(a^2\psi+\omega)\xi^2-2a\alpha\psi\xi\\ &+(b^2\psi+\omega)\eta^2-2b\beta\psi\eta\\ &+(c^2\psi+\omega)\zeta^2-2c\gamma\psi\zeta. \end{aligned}$$

Die in No. 89) vorkommende Exponenzialgrösse zerfällt nunmehr in vier Faktoren, von denen der erste in Beziehung auf ξ, η, ζ constant ist, der zweite nur ξ, der dritte nur η und der letzte nur ζ enthält. Zufolge dieser Sonderung der Variabeln verwandelt sich das dreifache Integral

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{(s\omega+r^2\psi)i}$$

in das Produkt der folgenden vier Faktoren:

$$e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\psi i}$$

$$\int_{-\infty}^\infty d\xi\,.\,e^{[(a^2\psi+\omega)\xi^2-2a\alpha\psi\xi]i}$$

$$\int_{-\infty}^\infty d\eta\,.\,e^{[(b^2\psi+\omega)\eta^2-2b\beta\psi\eta]i}$$

$$\int_{-\infty}^\infty d\zeta\,.\,e^{[(c^2\psi+\omega)\zeta^2-2c\gamma\psi\zeta]i}.$$

Nach einer bekannten Formel ist nun *)

$$\int_{-\infty}^\infty e^{[hv^2-2kv]i}\,dv=\sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{\frac{1}{4}\pi i-\frac{k^2}{h}i}$$

und mit Hülfe derselben lassen sich die obigen Integrationen ausführen, indem man successiv $v=\xi$, η, ζ

*) s. Note V.

$$h = \alpha^2\psi + \omega, \quad b^2\psi + \omega, \quad c^2\psi + \omega$$
$$k = \quad a\alpha\psi \quad , \quad b\beta\psi \quad , \quad c\gamma\psi$$

setzt. Durch Ausführung dieser kleinen Rechnung und nachherige Vereinigung jener vier Faktoren findet man ohne Mühe, dass das dreifache Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, d\zeta\, e^{(s\omega + r^2\psi)i}$$

folgenden Werth hat:

$$\frac{\sqrt{\pi}^3}{\sqrt{(a^2\psi + \omega)(b^2\psi + \omega)(c^2\psi + \omega)}}\, e^{3/_4\pi i + \Psi i},$$

worin zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$\Psi = \frac{\alpha^2\omega\psi}{a^2\psi + \omega} + \frac{\beta^2\omega\psi}{b^2\psi + \omega} + \frac{\gamma^2\omega\psi}{c^2\psi + \omega}.$$

Substituiren wir nun den soeben gefundenen Werth des in Beziehung auf ξ, η, ζ genommenen dreifachen Integrales in die Gleichung 89), so wird

90) $$S = \pi e^{3/_4\pi i}\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{\sqrt{\psi}}\,\frac{e^{\Psi i}}{\sqrt{(a^2\psi + \omega)(b^2\psi + \omega)(c^2\psi + \omega)}}.$$

Diess lässt sich noch etwas einfacher darstellen, wenn man statt ψ eine neue Variable t der Art einführt, dass $\psi = \frac{\omega}{t}$ ist, wobei ω als Constante angesehen wird. Man erhält dann

$$d\psi = -\frac{\omega}{t^2}\,dt$$

und die Grösse Ψ geht über in

$$\frac{\alpha^2\omega}{a^2 + t} + \frac{\beta^2\omega}{b^2 + t} + \frac{\gamma^2\omega}{c^2 + t}.$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung in nachstehender Weise

91) $$T = \frac{\alpha^2}{a^2 + t} + \frac{\beta^2}{b^2 + t} + \frac{\gamma^2}{c^2 + t},$$

so ist einfach $\Psi = \omega T$ und die Gleichung 90) gestaltet sich wie folgt:

92) $$S = \pi e^{3/_4\pi i}\,\frac{1}{\omega}\int_0^{\infty}\frac{dt\,.\,e^{\omega T i}}{\sqrt{(a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t)}}$$

womit S auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht ist.

§. 10.

Schluss.

Kehren wir nun zur Formel 87) zurück und führen in dieselbe den Werth von S ein, so ergiebt sich jetzt

$$Q=2abc\,e^{\frac{1}{2}\pi i}\int_0^\infty d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta\,\frac{1}{\omega}\int_0^\infty\frac{dt\,e^{\omega Ti}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}$$

oder wenn wir die auf t bezügliche Integration bis zuletzt aufsparen

$$Q=2abc\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\int_0^\infty\frac{d\omega}{\omega}e^{(\frac{1}{2}\pi+T\omega)i}\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta.$$

Der reelle Bestandtheil hiervon ist das Potential, nämlich

$$P=-2abc\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\int_0^\infty\frac{d\omega}{\omega}\sin T\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta$$

und hieraus findet sich die Componente A der Anziehung durch die Formel $A=-D_\alpha P$, wobei zu berücksichtigen ist, dass α nur in T vorkommt und

$$\frac{d(\sin T\omega)}{d\alpha}=\omega\cos T\omega\,.\,\frac{dT}{d\alpha}=\omega\cos T\omega\,.\,\frac{2\alpha}{a^2+t}$$

ist. Nach dieser Bemerkung ergiebt sich sogleich

93)

$$A=4\alpha abc\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\,.\,\frac{1}{a^2+t}\int_0^\infty\cos T\omega d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta.$$

Hier lässt sich der Werth des auf ϑ und ω bezogenen Doppelintegrales

94) $$\int_0^\infty\cos T\omega\,d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta$$

sehr leicht mittelst des Theoremes von *Fourier* entwickeln, wenn man auf die Unterscheidung der Fälle $T<1$ und $T>1$ eingeht.

Liegt der angezogene Punkt $\alpha\beta\gamma$ innerhalb des anziehenden Ellipsoides, so ist

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}<1$$

folglich um so mehr

$$\frac{\alpha^2}{a^2+t}+\frac{\beta^2}{b^2+t}+\frac{\gamma^2}{c^2+t}<1$$

d. h. $$T<1,$$

weil t vermöge der Integrationsgränzen $t=0$ bis $t=\infty$ nur positive Werthe erlangt; das in Nr. 94) verzeichnete Doppelintegral ist dann $=\frac{1}{2}\pi\, f(T)$ und mithin für einen inneren Punkt

95) $$A=2\pi\alpha\, abc\int_0^\infty \frac{f(T)}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\;\frac{dt}{a^2+t}.$$

Diess gilt auch noch für einen auf der Oberfläche des Ellipsoides liegenden Punkt $\alpha\beta\gamma$; bei diesem ist zwar

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1,$$

aber wegen $t>0$ doch noch $T<1$.

Befindet sich dagegen der angezogene Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausserhalb des Ellipsoides, so ist

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}>1,$$

also anfangs, d. h. für $t=0$, $T>1$. Während aber t das Integrationsintervall $t=0$ bis $t=\infty$ durchläuft, nimmt T fortwährend ab bis zur Null. Es giebt daher eine Stelle, bis zu welcher $T>1$ ist und von welcher ab $T<1$ wird und bleibt; diese Stelle bestimmt sich durch Auflösung der Gleichung $T=1$ oder

$$\frac{\alpha^2}{a^2+t}+\frac{\beta^2}{b^2+t}+\frac{\gamma^2}{c^2+t}=1.$$

Nennen wir τ die reelle positive Wurzel derselben, so ist $T>1$ so lange $t<\tau$, dagegen $T<1$, wenn $t>\tau$. Zerlegen wir nun das Integrationsintervall $t=0$ bis $t=\infty$ in zwei andere von $t=0$ bis $t=\tau$ und von da bis $t=\infty$, so ist

$$A=4\alpha\, abc\int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\;\frac{1}{a^2+t}\int_0^\infty \cos T\omega\, d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\, d\vartheta$$

$$+\,4\alpha\, abc\int_\tau^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\;\frac{1}{a^2+t}\int_0^\infty \cos T\omega\, d\omega\int_0^1 f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\, d\vartheta.$$

Im ersten Integrale hat man wegen $t < \tau$, $T > 1$ und folglich

$$\int_0^\infty \cos T\omega \, d\omega \int_0^1 f(\vartheta) \cos \omega\vartheta \, d\vartheta = 0,$$

im zweiten Integrale wegen $t > \tau$, $T < 1$, mithin

$$\int_0^\infty \cos T\omega \, d\omega \int_0^1 f(\vartheta) \cos \omega\vartheta \, d\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi f(T)$$

und mithin bleibt übrig

96) $$A = 2\pi\alpha abc \int_\tau^\infty \frac{f(T)}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \, \frac{dt}{a^2+t}.$$

Fassen wir alles Bisherige zusammen, so haben wir folgendes Theorem:

Unter den hinsichtlich der Dichtigkeit gemachten Voraussetzungen ist die längs der Halbaxe a wirkende Componente der Anziehung

97) $$A = 2\pi\alpha abc \int_\omega^\infty \frac{f(T)}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \, \frac{dt}{a^2+t},$$

wobei an die Stelle der unteren Integrationsgränze ω die reelle positive Wurzel der Gleichung $T = 1$ oder die Null zu setzen ist, je nachdem der angezogene Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausserhalb des Ellipsoides liegt oder nicht.

Für eine constante Dichtigkeit $f(s) = \Theta$, also auch $f(T) = \Theta$, wird

$$A = 2\pi\Theta abc \int_\omega^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \, \frac{dt}{a^2+t}.$$

Bei einem inneren Punkte, d. h. für $\omega = 0$, ist die Uebereinstimmung dieses Ausdrucks mit dem früher in §. 5. gefundenen Werthe von A leicht nachzuweisen; es bedarf nur der Substitution $t = a^2 \tan^2\vartheta$, um die vorstehende Formel sogleich in diejenige überzuführen, welche vor No. 38) vorhergeht.

Besondere Aufmerksamkeit verdient noch ein Reduktionstheorem, welches sich an die Formel 97) knüpft. Unter der Voraussetzung eines aussenliegenden Punktes führen wir nämlich in die Formel

$$A = 2\pi\,\alpha\,a\,b\,c\int_\omega^\infty \frac{dt}{(a^2+t)\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\,f\left(\frac{\alpha^2}{a^2+t}+\frac{\beta^2}{b^2+t}+\frac{\gamma^2}{c^2+t}\right)$$

eine neue Variable t_1 der Art ein, dass $t = \omega + t_1$ ist; zugleich setzen wir

98) $$a^2+\omega = a_1^{\,2},\quad b^2+\omega = b_1^{\,2},\quad c^2+\omega = c_1^{\,2};$$

es ergiebt sich dann sogleich

$$A = 2\pi\,\alpha\,abc\int_0^\infty \frac{dt_1}{(a_1^{\,2}+t_1)\sqrt{(a_1^{\,2}+t_1)(b_1^{\,2}+t_1)(c_1^{\,2}+t_1)}}\,f\left(\frac{\alpha^2}{a_1^{\,2}+t_1}+\frac{\beta^2}{b_1^{\,2}+t_1}+\frac{\gamma^2}{c_1^{\,2}+t_1}\right).$$

Lassen wir aber ein neues Ellipsoid mit den Halbaxen a_1, b_1, c_1 denselben Punkt $\alpha\beta\gamma$ unter der Voraussetzung anziehen, dass derselbe nicht ausserhalb des Ellipsoides liegt, so wäre die Componente A_1 dieser Anziehung:

$$A_1 = 2\pi\alpha\,a_1\,b_1\,c_1\int_0^\infty \frac{dt_1}{(a_1^{\,2}+t_1)\sqrt{(a_1^{\,2}+t_1)(b_1^{\,2}+t_1)(c_1^{\,2}+t_1)}}\,f\left(\frac{\alpha^2}{a_1^{\,2}+t_1}+\frac{\beta^2}{b_1^{\,2}+t_1}+\frac{\gamma^2}{c_1^{\,2}+t_1}\right)$$

und folglich durch Vergleichung mit dem Vorhergehenden:

99) $$\frac{A}{A_1} = \frac{abc}{a_1\,b_1\,c_1}.$$

Auf ganz gleiche Weise wäre

$$\frac{B}{B_1} = \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}\quad,\quad \frac{C}{C_1} = \frac{abc}{a_1\,b_1\,c_1}$$

und folglich würde auch für die Resultanten R und R_1 dieser Anziehungen die ähnliche Beziehung

100) $$\frac{R}{R_1} = \frac{abc}{a_1\,b_1\,c_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi abc}{\frac{4}{3}\pi\,a_1\,b_1\,c_1}$$

statt finden. Aus den Gleichungen 98) geht nun aber hervor, dass die beiden Ellipsoide gleiche Excentricitäten

$$\sqrt{a_1^{\,2}-b_1^{\,2}} = \sqrt{a^2-b^2}\ ,\ \sqrt{a_1^{\,2}-c_1^{\,2}} = \sqrt{a^2-c^2}\ ,\ \sqrt{b_1^{\,2}-c_1^{\,2}} = \sqrt{b^2-c^2}$$

besitzen; aus der zur Bestimmung von ω dienenden Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\omega}+\frac{\beta^2}{b^2+\omega}+\frac{\gamma^2}{c^2+\omega} = 1$$

folgt andererseits mittelst der Gleichungen 98)

$$\frac{\alpha^2}{a_1^{\,2}}+\frac{\beta^2}{b_1^{\,2}}+\frac{\gamma^2}{c_1^{\,2}} = 1,$$

d. h. die Oberfläche des zweiten Ellipsoides geht durch $\alpha\beta\gamma$; demnach dürfen wir jetzt folgendes bemerkenswerthe Theorem aussprechen:

Wenn ein aus stetig aufeinanderfolgenden ähnlichen homogenen Schichten zusammengesetztes Ellipsoid einen aussenliegenden Punkt anzieht, und ein zweites, dem ersten confokales, Ellipsoid construirt wird, dessen Oberfläche durch den angezogenen Punkt geht und dessen Dichtigkeit nach demselben Gesetze variirt, so verhalten sich die gleichnamigen Componenten der Anziehungen, welche beide Ellipsoide auf jenen Punkt ausüben (der nun ausserhalb des ersten, aber auf der Oberfläche des zweiten Ellipsoides liegt), wie die Volumina der beiden Körper; dasselbe Verhältniss gilt auch für die resultirenden Anziehungen selbst.

Man wird sogleich bemerken, dass dieses neue Theorem dem von *Ivory* aufgestellten ähnlich, aber insofern einfacher ist, als es nicht der Bestimmung eines correspondirenden Punktes bedarf, welcher von dem zweiten Ellipsoide angezogen wird. Wie diese grössere Einfachheit mit der Sache selbst zusammenhängt, mag aus folgender Bemerkung erhellen. Die Bestimmung der Componente A erfordert eine dreifache Integration; führt man keine von diesen drei Integrationen aus, so lassen sich die Anziehungen, welche zwei Ellipsoide auf einen oder auch auf zwei verschiedene Punkte ausüben, nur dadurch proportional machen, dass man das zweite Ellipsoid dem ersten congruent nimmt und die angezogenen Punkte zusammenfallen lässt; diess giebt aber absolute Identität und mithin keine brauchbare Vergleichung. Führt man dagegen eine von jenen drei Integrationen aus, wie es in §. 7. geschehen ist, so erhält man einigen Spielraum und kann jetzt die Proportionalität der Componenten sowohl durch Congruenz ($\omega=0$) als auf eine zweite Weise (durch die cubische Gleichung für ω) bewirken, und zwar erfordert das Letztere die Auflösung von 6 Gleichungen. Führt man aber zwei von jenen drei Integrationen aus, wie diess durch die Formel 97) geschehen ist, so wird die Beweglichkeit noch grösser und es bedarf nur noch dreier Gleichungen, um die Proportionalität der Componenten zu erlangen.

Die Allgemeinheit des aufgestellten Theorems erlaubt natürlich eine Anwendung desselben auf den Fall eines homogenen Ellipsoides, indem wir nur $f(s)=f(T)=\Theta$ constant zu nehmen brauchen. Setzen wir $c=a>b$, also auch $c_1=a_1>b_1$, so wäre jetzt für das abgeplattete Rotationsellipsoid

$$A = \frac{a^2 b}{a_1^2 b_1^2} A_1,$$

wo A_1 die Componente der Anziehung bedeutet, die ein aus den Halbachsen

$$a_1 = \sqrt{a^2 + \omega}\ ,\ b_1 = \sqrt{b^2 + \omega}$$

construirtes abgeplattetes Rotationsellipsoid auf den in seiner Oberfläche liegenden Punkt $\alpha\beta\gamma$ ausübt. Diese Componente A_1 wäre nach No. 45)

$$A_1 = 2\pi\Theta \frac{\alpha\, b_1}{a_1} \frac{Arcsin\, \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^3},$$

worin ε_1 die numerische Excentricität des neuen Ellipsoides bezeichnet; hieraus folgt

$$A = 2\pi\Theta\alpha \frac{a^2 b}{a_1^3} \frac{Arcsin\, \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1^3},$$

was mit der Formel 74) übereinstimmt, wenn man statt a_1 seinen Werth einsetzt.

Noten.

I. In Fig. 1. seien OX, OY, OZ die drei Coordinatenachsen und $OK = x$, $KL = y$, $LM = z$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes M; die polaren Coordinaten desselben Punktes mögen heissen $OM = \varrho$, $\angle MOX = \vartheta$ und $\angle MKL = \omega$; unter diesen Voraussetzungen ist in dem bei K rechtwinkligen Dreiecke OKM

$$OK = OM \cos MOK, \text{ d. h. } x = \varrho \cos\vartheta$$
$$MK = OM \sin MOK = \varrho \sin\vartheta;$$

ferner in dem bei L rechtwinkligen Dreiecke KLM

$$KL = KM \,.\, \cos MKL, \text{ d. i. } y = \varrho \sin\vartheta \,.\, \cos\omega$$
$$LM = KM \,.\, \sin MKL, \text{ d. i. } z = \varrho \sin\vartheta \,.\, \sin\omega$$

und diess sind die bekannten Formeln zur Verwandlung von rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten.

Lassen wir ϱ, ϑ, ω sich ändern und zwar ϱ um das unendlich kleine Inkrement $MU = d\varrho$, den Winkel ϑ um $MOV = d\vartheta$ und ω um $MKW = d\varrho$, so erhalten wir das Volumenelement dV in Polarcoordinaten ausgedrückt. Obwohl dasselbe die Form eines Gewölbsteines besitzt, so kann man es, wegen der unendlichen Kleinheit seiner Dimensionen, doch als Parallelopiped mit den drei Kanten

$$MU = \varrho, \; MV = \varrho\, d\vartheta, \; MW = MK \,.\, d\omega = \varrho \sin\vartheta\, d\omega$$

betrachten, und so gewinnt man die Formel

$$dV = MU \,.\, MV \,.\, MW = \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\omega,$$

von welcher im Texte mehrfach Gebrauch gemacht worden ist.

II. Es kommt häufig vor, dass in einem bestimmten Integrale sowohl die zu integrirende Funktion als auch die beiden Integrationsgränzen eine und dieselbe willkührliche Constante enthalten, wie diess z. B. bei

$$\int_{l\mu}^{\sqrt{\mu}} \frac{dx}{\mu^2 + x^2}$$

der Fall ist; das allgemeine Schema eines solchen Integrals wäre

$$1) \qquad S = \int_a^b \psi(\mu, x)\, dx,$$

wo nun a und b als Funktionen von μ zu betrachten sind und mithin auch der Werth S des Integrales von μ abhängt.

Lassen wir μ sich um $\Delta\mu$ ändern, so gehen a, b, S in $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $S + \Delta S$ über und durch Subtraktion wird

$$\Delta S = \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} \psi(\mu + \Delta\mu, x)\, dx - \int_a^b \psi(\mu, x)\, dx.$$

Hier lässt sich das erste Integral in die drei folgenden zerlegen:

$$-\int_a^{a+\Delta a} \psi(\mu + \Delta\mu, x)\, dx + \int_a^b \psi(\mu + \Delta\mu, x)\, dx + \int_b^{b+\Delta b} \psi(\mu + \Delta\mu, x)\, dx$$

und dadurch nimmt ΔS folgende Gestalt an:

$$\Delta S = \int_b^{b+\Delta b} \psi(\mu + \Delta\mu, x)\, dx - \int_a^{a+\Delta a} \psi(\mu + \Delta\mu, x)\, dx$$

$$+ \int_a^b [\psi(\mu + \Delta\mu, x) - \psi(\mu, x)]\, dx$$

und durch Division mit $\Delta\mu$, welches in Beziehung auf die Integration constant ist,

$$2) \qquad \frac{\Delta S}{\Delta\mu} = \frac{1}{\Delta\mu} \int_b^{b+\Delta b} \psi(\mu + \Delta\mu, x)\, dx - \frac{1}{\Delta\mu} \int_a^{a+\Delta a} \psi(\mu + \Delta\mu, x)\, dx$$

$$+ \int_a^b \left\{ \frac{\psi(\mu + \Delta\mu, x) - \psi(\mu, x)}{\Delta\mu} \right\} dx.$$

Bezeichnen wir nun das unbestimmte Integral von $\psi(\mu, x)\, dx$ mit $\varphi(\mu, x)$, so dass also

$$3) \qquad \frac{d\varphi(\mu, x)}{dx} = \psi(\mu, x)$$

ist, so haben wir

$$\frac{1}{\Delta\mu}\int_b^{b+\Delta b}\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx=\frac{\varphi(\mu+\Delta\mu,b+\Delta b)-\varphi(\mu+\Delta\mu,b)}{\Delta\mu}$$

$$=\frac{\varphi(\mu+\Delta\mu,b+\Delta b)-\varphi(\mu+\Delta\mu,b)}{\Delta b}\cdot\frac{\Delta b}{\Delta\mu}$$

und auf gleiche Weise

$$\frac{1}{\Delta\mu}\int_a^{a+\Delta a}\psi(\mu+\Delta\mu,x)\,dx=\frac{\varphi(\mu+\Delta\mu,a+\Delta a)-\varphi(\mu+\Delta\mu,a)}{\Delta a}\cdot\frac{\Delta a}{\Delta\mu}.$$

Ausserdem steht in No. 2) unter dem letzten Integralzeichen der partiell in Beziehung auf μ genommene Differenzenquotient von $\psi(\mu,x)$; dieser ist um so weniger von dem entsprechenden partiellen Differenzialquotienten verschieden, je kleiner $\Delta\mu$ wird, und wir können daher

4) $$\frac{\psi(\mu+\Delta\mu,x)-\psi(\mu,x)}{\Delta\mu}=\left(\frac{d\psi(\mu,x)}{d\mu}\right)+\varepsilon$$

setzen, wo ε eine mit $\Delta\mu$ gleichzeitig verschwindende Grösse bezeichnet. Nach diesen Bemerkungen kann die Gleichung 2) durch die folgende ersetzt werden:

$$\frac{\Delta S}{\Delta\mu}=\frac{\varphi(\mu+\Delta\mu,\,b+\Delta b)-\varphi(\mu+\Delta\mu,b)}{\Delta b}\cdot\frac{\Delta b}{\Delta\mu}$$
$$-\frac{\varphi(\mu+\Delta\mu,\,a+\Delta a)-\varphi(\mu+\Delta\mu,a)}{\Delta a}\cdot\frac{\Delta a}{\Delta\mu}$$
$$+\int_a^b\left(\frac{d\psi(\mu,x)}{d\mu}\right)dx+\int_a^b\varepsilon\,dx$$

und hieraus ergiebt sich durch Uebergang zur Gränze für unendlich klein werdende $\Delta\mu$,

$$\frac{dS}{d\mu}=\frac{d\varphi(\mu,b)}{db}\cdot\frac{db}{d\mu}-\frac{d\varphi(\mu,a)}{da}\cdot\frac{da}{d\mu}$$
$$+\int_a^b\left(\frac{d\psi(\mu,x)}{d\mu}\right)dx+Lim\int_a^b\varepsilon\,dx$$

oder vermöge der Gleichung 3)

5) $$\frac{dS}{d\mu}=\psi(\mu,b)\frac{db}{d\mu}-\psi(\mu,a)\frac{d\mu}{da}$$
$$+\int_a^b\left(\frac{d\psi(\mu,x)}{d\mu}\right)dx+Lim\int_a^b\varepsilon\,dx.$$

Obwohl nun ε bis zur Null abnimmt, so darf man doch nicht schliessen, dass immer

$$Lim \int_a^b \varepsilon\, dx = 0$$

sein müsse, da z. B. für $b = \infty$ der Werth des Integrales völlig unbestimmt werden kann. Um eine genauere Bedingung zu haben, erinnern wir an den bis zum zweiten Gliede genommenen *Taylor*'schen Satz, dem zufolge die Gleichung

$$\psi(\mu + \Delta\mu) = \psi(\mu) + \frac{\Delta\mu}{1}\psi'(\mu) + \frac{(\Delta\mu)^2}{1.2}\psi''(\mu + \vartheta.\Delta\mu)$$
$$(1 > \vartheta > 0)$$

stattfindet, aus welcher folgt

$$\frac{\psi(\mu + \Delta\mu) - \psi(\mu)}{\Delta\mu} = \psi'(\mu) + \tfrac{1}{2}\Delta\mu.\psi''(\mu + \vartheta.\Delta\mu)$$

und ebenso, wenn μ als alleinige Variable angesehen wird

$$\frac{\psi(\mu + \Delta\mu, x) - \psi(\mu, x)}{\Delta\mu} = \psi_\mu'(\mu, x) + \tfrac{1}{2}\Delta\mu.\psi_\mu''(\mu + \vartheta.\Delta\mu, x).$$

Durch Vergleichung mit No. 4) erhalten wir jetzt den Werth von ε, nämlich

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\Delta\mu.\psi_\mu''(\mu + \vartheta.\Delta\mu, x)$$

und mithin

$$Lim \int_a^b \varepsilon\, dx = \tfrac{1}{2} Lim \left[\Delta\mu.\int_a^b \psi_\mu''(\mu + \vartheta.\Delta\mu, x)\, dx\right]$$
$$= \tfrac{1}{2} Lim \left[\Delta\mu \int_a^b \psi_\mu''(\mu, x)\, dx\right].$$

Wenn nun das bestimmte Integral

$$6) \qquad \int_a^b \psi_\mu''(\mu, x)\, dx = \int_a^b \left(\frac{d^2\psi(\mu, x)}{d\mu^2}\right) dx$$

einen endlichen Werth hat, so ist die vorhergehende *Lim* ganz sicher $= 0$, ausserdem aber würde sie sich unter die unbestimmte Form $0.\infty$ stellen. Wir dürfen daher sagen: unter der Voraussetzung, dass das in No. 6) verzeichnete Integral einen endlichen Werth besitzt, gilt die Formel

7) $$D_\mu \int_a^b \psi(\mu, x)\, dx = \psi(\mu, b) \frac{db}{d\mu} - \psi(\mu, a) \frac{da}{d\mu} + \int_a^b \left(\frac{d\psi(\mu, x)}{d\mu}\right) dx.$$

Kommt μ nur in b, nicht aber in ψ und a vor, so vereinfacht sich die Gleichung wie folgt:

8) $$D_\mu \int_a^b \psi(x)\, dx = \psi(b) \frac{db}{d\mu}$$

ebenso, wenn nur a allein von μ abhängt

9) $$D_\mu \int_a^b \psi(\mu, x)\, dx = -\psi(a) \frac{da}{d\mu}$$

und diese Formeln sind es, von welchen im Texte Gebrauch gemacht wurde, einmal für $b = \mu$ und einmal für $a = \mu$.

Sind a und b von μ unabhängig, so hat man

10) $$D_\mu \int_a^b \psi(\mu, x)\, dx = \int_a^b \left(\frac{d\psi(\mu, x)}{d\mu}\right) dx.$$

Multiplizirt man diese Gleichung, welche auch in der umgekehrten Form

$$\int_a^b \left(\frac{d\psi(\mu, x)}{d\mu}\right) dx = \frac{d\int_a^b \psi(\mu, x)\, dx}{d\mu}$$

dargestellt werden kann, mit $d\mu$ und integrirt nachher, so wird

$$\int d\mu \int_a^b \left(\frac{d\psi(\mu, x)}{d\mu}\right) dx = \int_a^b dx\, \psi(\mu, x)$$

und wenn man nach Ausführung der auf μ bezüglichen Integration dieser Variabeln die beiden Werthe $\mu = \beta$, $\mu = \alpha$ ertheilt, so ist durch Subtraction

$$\int_\alpha^\beta d\mu \int_a^b \left(\frac{d\psi(\mu, x)}{d\mu}\right) dx$$

$$= \int_a^b dx\, \psi(\beta, x) - \int_a^b dx\, \psi(\alpha, x) = \int_a^b dx\, [\psi(\beta, x) - \psi(\alpha, x)].$$

Es bedarf nur einer etwas anderen Schreibweise, um diese Formel zu einem der wichtigsten Theoreme der Integralrechnung umzugestalten; für

$$\left(\frac{d\,\psi(\mu,x)}{d\mu}\right)=\varphi(\mu,x)$$

wird nämlich umgekehrt

$$\psi(\mu,x)=\int\varphi(\mu,x)\,d\mu$$

und für $\mu=\beta$, $\mu=\alpha$ durch Subtraction

$$\psi(\beta,x)-\psi(\alpha,x)=\int_\alpha^\beta\varphi(\mu,x)\,d\mu.$$

In das Vorhergehende substituirt, giebt diess die Gleichung

11) $$\int_\alpha^\beta d\mu\int_a^b\varphi(\mu,x)\,dx=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta\varphi(\mu,x)\,d\mu,$$

welche zu erkennen giebt, dass in einem Doppelintegrale mit constanten Gränzen die Integrationsordnung umgekehrt werden darf, wenn nämlich das Integral

$$\int_a^b\left(\frac{d^2\psi(\mu,x)}{d\mu^2}\right)dx$$

d. h. im vorliegenden Falle

12) $$\int_a^b\left(\frac{d\varphi(\mu,x)}{d\mu}\right)dx$$

einen endlichen Werth besitzt. Diese Bedingung ist z. B. immer erfüllt, wenn a und b endliche Grössen sind und die Funktion $\left(\frac{d\varphi(\mu,x)}{d\mu}\right)$ innerhalb der Gränzen $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig bleibt.

III. Eine auf ganz elementaren Prinzipien beruhende Ableitung dieses wichtigen Theorems ist folgende:

Bezeichnen wir mit K den unbekannten Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

von welchem sich leicht nachweisen lässt, dass er eine endliche bestimmte Grösse sein muss, so kann auch der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin h\omega}{\omega}\, d\omega$$

sehr leicht angegeben werden. Für $h=0$ ist derselbe offenbar $=0$ und für negative h derselbe wie für positive h nur mit entgegengesetztem Zeichen; wir können uns daher auf ein positives von Null verschiedenes h beschränken. Nun ist aber

$$\int_0^\infty \frac{\sin h\omega}{\omega}\, d\omega = \int_0^\infty \frac{\sin h\omega}{h\omega}\, d(h\omega)$$

und folglich für $h\omega = t$ auch

$$= \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = K,$$

weil die neuen Integrationsgränzen für t sein würden $t = h\,.\,0 = 0$ und $t = h\,.\,\infty = \infty$; daher gilt die Gleichung

1) $$\int_0^\infty \frac{\sin h\omega}{\omega}\, d\omega = K, \quad \text{für } \infty > h > 0,$$

für $h=0$ ist dagegen die rechte Seite $=0$ und für ein negatives h wird sie $=-K$.

Man hat nun allgemeiner für $m > n$

$$\int_0^\infty \frac{\sin m\omega \cos n\omega}{\omega}\, d\omega = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(m+n)\omega}{\omega}\, d\omega + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(m-n)\omega}{\omega}\, d\omega$$

$$= \tfrac{1}{2}K + \tfrac{1}{2}K = K,$$

dagegen für $m = n$

$$\int_0^\infty \frac{\sin m\omega \cos n\omega}{\omega}\, d\omega = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2m\omega}{\omega}\, d\omega = \tfrac{1}{2}K,$$

endlich für $m < n$

$$\int_0^\infty \frac{\sin m\omega \cos n\omega}{\omega} d\omega = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(n+m)\omega}{\omega} d\omega - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(n-m)\omega}{\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2}K - \frac{1}{2}K = 0$$

und wir können daher sagen: der Werth des Integrales

2) $$\int_0^\infty \frac{\sin m\omega \cos n\omega}{\omega} d\omega$$

ist $= K$, $\frac{1}{2}K$, 0,

je nachdem $m > n$, $m = n$, $m < n$.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir das Doppelintegral

3) $$S = \int_0^\infty d\omega \int_a^b \frac{\cos s\omega}{\omega} F(\vartheta) \sin \omega\vartheta \, d\vartheta$$

oder

4) $$S = \int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\omega} d\omega \int_a^b F(\vartheta) \sin \omega\vartheta \, d\vartheta.$$

Kehren wir in No. 3) die Anordnung der Integrationen um, so wird daraus

5) $$S = \int_a^b d\vartheta \int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\omega} F(\vartheta) \sin \vartheta\omega \, d\omega$$

oder

6) $$S = \int_a^b F(\vartheta) \, d\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta\omega \cos s\omega}{\omega} d\omega$$

und zwar ist diese Umkehrung erlaubt, wenn das Integral

$$\int_a^b D_\omega \left[\frac{\cos s\omega}{\omega} F(\vartheta) \sin \omega\vartheta\right] d\vartheta$$

einen endlichen Werth besitzt, was jederzeit der Fall ist, wenn $F(\vartheta)$ innerhalb der Gränzen $\vartheta = a$ bis $\vartheta = b$ endlich bleibt.

Wir unterscheiden nun behufs der weiteren Diskussion von No. 6) die Fälle $s > b$, $b > s > a$, $a > s > 0$. — Im ersten Falle hat man we-

gen der für ϑ geltenden Integrationsgränzen $b > \vartheta$, folglich um so mehr $s > \vartheta$ oder $\vartheta < s$ und mithin verschwindet nach No. 2) das auf ω bezügliche Integral; also

7) $$S = 0 \quad \text{für} \quad s > b.$$

Im zweiten Falle zerlegen wir wie folgt:

$$S = \int_a^s F(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta\omega \cos s\omega}{\omega}\, d\omega$$

$$+ \int_s^b F(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta\omega \cos s\omega}{\omega}\, d\omega$$

und dann ist im ersten Integrale $s > \vartheta$ wegen der für ϑ geltenden Integrationsgränzen und mithin verschwindet das auf ω bezügliche Integral; im zweiten Integrale ist dagegen $\vartheta > s$ und folglich der Werth des auf ω bezogenen Integrales $= K$, also

8) $$S = K \int_s^b F(\vartheta)\, d\vartheta \quad \text{für} \quad b > s > a.$$

Im dritten Falle $s < a$ ist um so mehr $s < \vartheta$, mithin

9) $$S = K \int_a^b F(\vartheta)\, d\vartheta \quad \text{für} \quad a > s > 0.$$

Vergleichen wir jetzt die in No. 6) verzeichnete Form mit den gefundenen Werthen, so ist

10) $$\int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\omega}\, d\omega \int_a^b F(\vartheta) \sin \omega\vartheta\, d\vartheta$$

$$= 0 \;,\; K \int_a^s F(\vartheta)\, d\vartheta \;,\; K \int_a^b F(\vartheta)\, d\vartheta$$

für: $$s > b \;,\quad b > s > a \;,\quad a > s > 0.$$

Nennen wir $f(\vartheta)$ das unbestimmte Integral von $F(\vartheta)\, d\vartheta$, so dass also $F(\vartheta) = f'(\vartheta)$ ist, so haben wir durch partielle Integration

$$\int \sin\omega\vartheta \,.\, F(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \sin\omega\vartheta \int F(\vartheta)\, d\vartheta - \int \omega \cos\omega\vartheta\, d\vartheta \int F(\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \quad \sin\omega\vartheta\, f(\vartheta) \quad - \quad \omega \int \cos\omega\vartheta\, d\vartheta\, f(\vartheta)$$

und durch Einführung der Gränzen $\vartheta = b$, $\vartheta = a$

$$\int_a^b F(\vartheta) \sin\omega\vartheta\, d\vartheta$$

$$= f(b) \sin b\omega - f(a) \sin a\omega - \omega \int_a^b f(\vartheta) \cos\omega\vartheta\, d\vartheta.$$

Substituiren wir diess in No. 10), so folgt:

$$f(b) \int_0^\infty \frac{\sin b\omega \sin s\omega}{\omega}\, d\omega - f(a) \int_a^\infty \frac{\sin a\omega \cos s\omega}{\omega}\, d\omega$$

$$- \int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \cos\omega\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \quad 0, \qquad K[f(s) - f(a)] \quad , \qquad K[f(b) - f(a)]$$

für $\qquad s > b, \qquad b > s > a \quad , \qquad a > s > 0.$

Die Werthe der beiden ersten Integrale linker Hand lassen sich aber nach No. 2) jederzeit bestimmen, indem man auf die drei unterschiedenen Fälle eingeht. Auf diese Weise findet man sehr leicht, dass der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \cos\omega\vartheta\, d\vartheta$$

$= K f(s)$ oder $= 0$ ist, je nachdem s innerhalb oder ausserhalb des Intervalles a bis b liegt.

Um die Constante K zu bestimmen, nehmen wir $a = 0$, $b = \infty$, $f(\vartheta) = e^{-r\vartheta}$, wo r eine willkürliche positive Grösse bezeichnet; für alle zwischen $a = 0$ und $b = \infty$ liegenden s, d. h. für jedes positive von Null verschiedene s, muss dann die Gleichung

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_0^\infty e^{-r\vartheta} \cos\omega\vartheta\, d\vartheta = K e^{-rs}$$

gelten. Mittelst der unbestimmten Integrationsformel

$$\int e^{-r\vartheta} \cos\omega\vartheta\ d\vartheta = \frac{-r\cos\omega\vartheta + \omega\sin\omega\vartheta}{r^2+\omega^2} e^{-r\vartheta}$$

erhält man auf der Stelle aus dem Vorigen

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega\ \frac{r}{r^2+\omega^2} = K e^{-rs}\ ,\ \infty > s > 0$$

und durch Einführung einer neuen Variabeln τ der Art, dass $\omega = r\tau$ ist,

$$\int_0^\infty \frac{\cos rs\tau}{1+\tau^2}\, d\tau = K e^{-rs}.$$

Für $r = 0$ folgt hieraus $K = \frac{1}{2}\pi$. Wir haben demnach das Theorem:

Der Werth des bestimmten Doppelintegrales

$$\int_0^\infty \cos s\omega\ d\omega \int_a^b f(\vartheta) \cos\omega\vartheta\ d\vartheta$$

ist $= \frac{1}{2}\pi\, f(s)$ oder $= 0$, je nachdem die positive Grösse s innerhalb oder ausserhalb des Intervalles a bis b liegt, a und b selbst als positiv vorausgesetzt.

Geht man von dem analog No. 4) gebildeten Doppelintegrale

$$S = \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{\sin s\omega}{\omega}\ F(\vartheta) \cos\omega\ d\omega$$

aus, so gelangt man durch ganz dieselben Schlüsse wie vorhin zu dem Correlate des obigen Satzes, nämlich:

Der Werth des bestimmten Doppelintegrales

$$\int_0^\infty \sin s\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \sin\omega\vartheta\ d\vartheta$$

ist $= \frac{1}{2}\pi\, f(s)$ oder $= 0$, je nachdem die positive Grösse von s innerhalb oder ausserhalb des Intervalles a bis b liegt, a und b selbst als positiv vorausgesetzt.

Es ist nicht ohne Interesse, die geometrische Bedeutung dieser Theoreme zu sehen. Denken wir uns zwei Curven, deren Gleichungen sein mögen

$$y_1 = f(x)$$

und
$$y_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos x\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \cos \omega\vartheta\, d\vartheta$$

wo nun x constant bleibt für die beiden Integrationen, so ist für alle zwischen a und b liegende x immer $y_2 = y_1$, ausserdem aber $y_2 = 0$; für negative x hat die zweite Curve dieselben Ordinaten wie für gleich grosse positive x. In Fig. 5. giebt die schwächere krumme Linie die willkührliche Curve $y_1 = f(x)$ an, mit welcher die zweite und stärkere Linie von $OA = a$ bis $OB = b$ zusammenfällt.

Die zweite durch *Fourier*'s Satz dargestellte Curve ist demnach diskontinuirlich und besteht theils aus der Abscissenachse, theils aus einem Stücke der gegebenen Curve. — Ganz ähnlich ist die Bedeutung der beiden Gleichungen

$$y_1 = f(x)$$

und
$$y_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin x\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \sin \omega\vartheta\, d\vartheta$$

nur dass der negative Theil der zweiten Curve umgekehrt liegt.

IV. Nimmt man in den Theoremen *Fourier*'s $a = 0$, $b = \infty$, $f(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}$, so ist für alle positiven von Null verschiedenen s

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_0^\infty \frac{\cos \omega\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\int_0^\infty \sin s\omega\, d\omega \int_0^\infty \frac{\sin \omega\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\, d\omega = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Setzt man in den beiden auf ϑ bezüglichen Integralen

$$\vartheta = \frac{s}{\omega}\,\tau,$$

wo τ die neue Variable bezeichnet, s und ω aber constant sind, so ergeben sich die Gleichungen

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \sqrt{\frac{s}{\omega}} \int_0^\infty \frac{\cos s\tau}{\sqrt{\tau}}\, d\tau = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\int_0^\infty \sin s\omega\, d\omega \sqrt{\frac{s}{\omega}} \int_0^\infty \frac{\sin s\tau}{\sqrt{\tau}}\, d\tau = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{s}},$$

wofür man schreiben kann

$$\left(\int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\sqrt{\omega}}\, d\omega\right)\left(\int_0^\infty \frac{\cos s\tau}{\sqrt{\tau}}\, d\tau\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{s}$$

$$\left(\int_0^\infty \frac{in\ s\omega}{\sqrt{\omega}}\, d\omega\right)\left(\int_0^\infty \frac{\sin s\tau}{\sqrt{\tau}}\, dt\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{s}.$$

Da es in einem bestimmten Integrale gleichgültig ist, mit welchem Buchstaben die Variable der Integration bezeichnet wird, so kann man auch ω statt τ schreiben und erhält dann die bekannten Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\sqrt{\omega}}\, d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2s}}\ , \quad \infty > s > 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin s\omega}{\sqrt{\omega}}\, d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2s}}\ , \quad \infty > s > 0.$$

Wir multipliziren hier die zweite mit $\sqrt{-1} = i$ und addiren sie zur ersten; es wird dann

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}}\, e^{s\omega i} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{1/_4 \pi i}$$

und diess ist die Formel, von welcher im Texte eine Anwendung gemacht wurde, wobei k und ψ statt s und ω gesetzt worden sind.

V. Schreiben wir in der soeben entwickelten Formel h für s, und führen wir eine neue Variable u ein, indem wir $\alpha = u^2$ setzen, so folgt

$$2\int_0^\infty e^{hu^2 i}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{1/4\,\pi i} \quad , \quad \infty > h > 0,$$

wobei für die linke Seite auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{hu^2 i}\,du$$

gesetzt werden kann, weil die Funktion $e^{hu^2 i}$ für negative u dieselbe ist, wie für positive. Setzen wir in der nunmehrigen Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{hu^2 i}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{1/4\,\pi i}$$

$$u = v - \frac{k}{h},$$

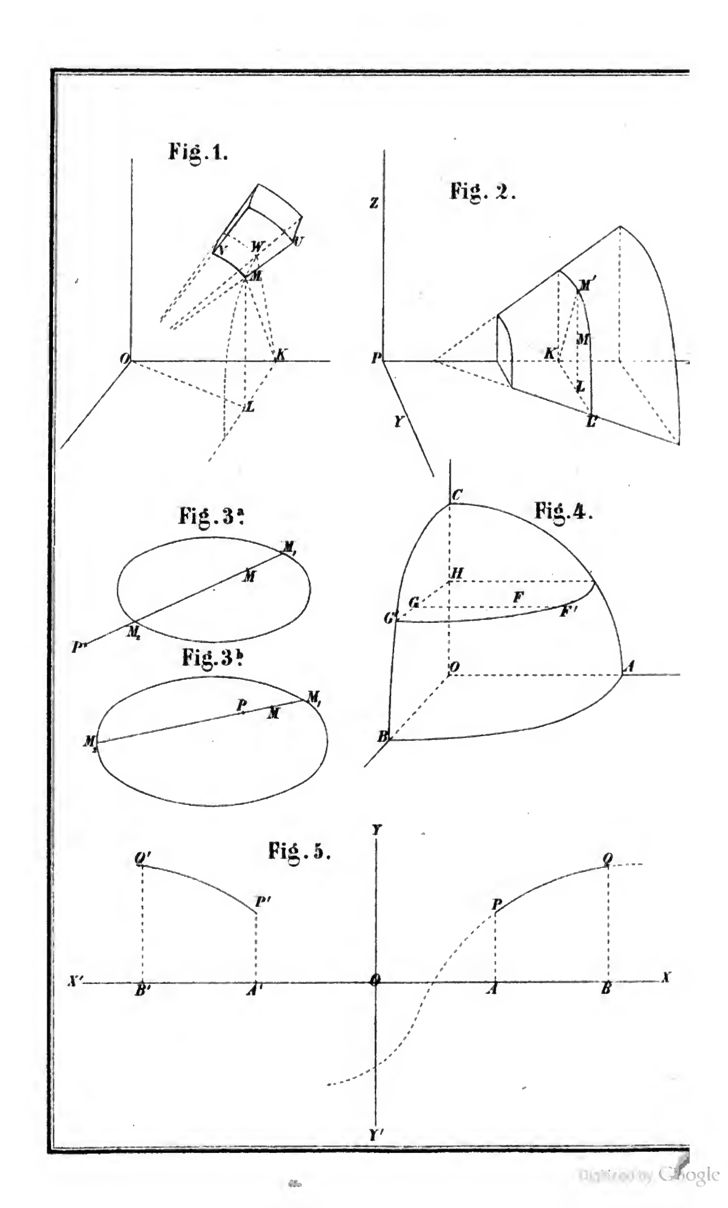
wodurch sich die Integrationsgränzen nicht verändern, so wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[hv^2 - 2kv + \frac{k2}{h}\right] i}\,dv = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{1/4\,\pi i}$$

oder durch Transposition des nur von k und h abhängigen Faktors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{[hv^2 - 2kv]\,i}\,dv = \sqrt{\frac{\pi}{h}}\,e^{1/4\,\pi i - \frac{k2}{h} i} \quad , \quad \infty > h > 0,$$

und diess ist die im Texte benutzte Formel.


Fig. 1.
V
W
U
M
O
K
L
Fig. 2.
Z
M'
M
P
K
L
L'
Y
Fig. 3ª.
M,
M
M₂
P
Fig. 3ᵇ.
P
M
M,
M₂
C
Fig. 4.
H
G
F
G'
F'
O
A
B
Y
Fig. 5.
Q'
Q
P'
P
X'
B'
A'
O
A
B
X
Y'



